II－1　　非線形河川流出の一表示

北海道大学工学部　正員　○岸　力
学生員　三島勇一

同一の河川流域でも降雨毎にUnit Graphが変化する性質 —— 河川流出の非線形性を解析的に表現する一つの方法を述べる。

本文に述べる方法は，非対称なUnit Graphを対称な正規誤差曲線に変換する変換式のパラメーターとしてUnit Graphの形の特性を表現するものである。

理論的な背景

Unit Graphの総流出量が1になるようにUnit GraphをDistribution Graphに置き換える。

Distribution Graph $q=q(t)$の独立変数tに適当な変換を施し，非対称なDistribution Graphを正規誤差曲線に近似させる。

すなわちDistribution Graphの横軸の時間tを新変数ξに変換し(1)の関係が成り立つようにする。

$$\int_0^t q(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\xi} e^{-\xi^2/2}\,d\xi \qquad (1)$$

(1)の左辺の積分範囲が$0 \sim t$，右辺は$-\infty \sim \xi$であるから$\log t - \xi$の関係を考える。

多くの場合(2)式の変換関係が適合する。

$$\xi = a\log t + b \qquad (2)$$

ここにa，bはUnit Graphの形状変化をあらわすパラメーター

(1)の両辺をtで微分すれば

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\xi^2/2)\cdot a/t \qquad (3)$$

peakの遅れの時間を求めるため$dq/dt=0$を計算すると

$$a\,\xi_p = -1 \qquad (4)$$

ここにξ_pは$t=t_p$のときのξの値

(4)を(3)に代入すると

$$q_p t_p = a\,\mathrm{erf}(1/a) \qquad (5)$$

ここに $\mathrm{erf}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\xi^2/2)$

q_p；$t=t_p$の時のqの値

(2)式に示したξと$\log t$との関係はEdson (1951)およびNash (1957)によるΓ－分布と等価である事を証明できる。Γ－分布は(6)で与えられる。

$$q(t) = B(\alpha,\beta)\,t^{\alpha}e^{-\beta t} \qquad (6)$$

ここにα,β；Unit Graphのパラメーター

$B(\alpha,\beta)$；Unit Graphの総量をきめるファクター

peakの遅れの時間t_pは(7)をみたす

$$t_p = \alpha/\beta \qquad (7)$$

従ってq_pは(8)で与えられる。

$$q_p = B(\alpha,\beta)(\alpha/\beta)^{\alpha}e^{-\alpha} \qquad (8)$$

(8)から(9)が導かれる。

$$q_p t_p = A\frac{\alpha^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}e^{-\alpha} = G(\alpha) \qquad (9)$$

ここにAは定数

(4)式を書き直すと(10)式が得られる

$$\xi_p = -1/a = a\log t_p + b$$

$$\text{又は}\quad t_p = \exp\left(-\frac{1+ab}{a^2}\right) \qquad (10)$$

(7)および(9)はそれぞれ(10){すなわち(4)}および(5)に対応するものであり，このことは結局パラメーターaがαに，bがβに対応する事を意味している。

パラメーターの値を決める実際的な方法

上述の理論ではパラメーターaがt_pおよびξ_p (or q_p)から決まり，次いでそのaの値を用いてbが決められた。云い換えると二つのパラメーターの値はUnit Graphのpeak時の特性だけで決められる。同様の計算はΓ－分布のパラメーターα，βを決めるにも採用されている。

その様な方法は若し(2)式が厳密に成立するならば簡便でよい方法である。しかし(2)はNash によってその物理的な根拠が考察されているけれども結局は近似的な経験式である。特に上述の方法では減水特性を考慮に入れる事はできない。

この意味で著者らはパラメーターを決める実用的な方法を提案する。

変換式(2)を考える。パラメーター a, b は次の条件を満たすようにする。

a) (2) が $t=t_P$ で成立する。

b) (2) が 50 %流出の時刻 t_{50} で成り立つ。

c) (2) が 90 %流出の時刻 t_{90} で成り立つ。

これらの条件は式であらわせば(11)~(13)になる。

$$a \log t_P + b = \xi_P \qquad (11)$$

$$a \log t_{50} + b = 0 \qquad (12)$$

$$a \log t_{90} + b = \xi_{90} \; (=1.28) \qquad (13)$$

a, b の値はこの3式から最小自乗法で定められる。

$\xi - \log t$ の変換式を考える本文の方法ではΓ-分布以外の他のUnit Graph も容易に解析できる。適用性が広い点がこの方法の一つの特長である。例えば変換式(14)を考える。

$$\xi = a \log (t + C) + b \qquad (14)$$

(14)は $\xi - \log t$ Graphが直線にならないで curve になる場合に用いられる。

Unit Graphでは統計解析の場合とちがって Unit Graphの基長―流出の継続時間は有限である。

従って(14)を用いれば流出の減水部がいくらか改善されるであろう。(14)を用いる時はパラメーターの決定に t_{90} よりは t_{99} を用いるのがよいであろう。

$\xi - \log t$ Graph の曲りを強調するためである。パラメーター決定式は(13) の代りに(15) を用いる。

$$a \log (t_{99} + C) + b = \xi_{99} \; (=2.33) \qquad (15)$$

(14)と同じく $\xi - \log t$ 曲線 をあらわすため (16) も採用できる。

$$\xi = a (\log t)^2 + b (\log t) + C \qquad (16)$$

(14), (16) は Unit Graph の基長の有限性を直接あらわしているわけではない。流出時間が有限である事を表現するため変換式 (17) が考えられる。

$$\xi = a \log \left(\frac{t + b}{t_{50} + b} \cdot \frac{t_u - t_{50}}{t_u - t} \right)$$

$$\text{or } \xi = a \left[\log (t + b) - \log (t_u - t) \right] + C \qquad (17)$$

こゝに t_u; 流出の終りの時間

実際に(17)を Unit Graph に適用すると減水部には適合するが，増水部では合わないで，増水部は他の変換式，例えば(2)が適合する場合がある。

この様な場合には $\xi - \log t$ 曲線を分けて変換式を作ることになる。

Unit Graph は一般に(18) で与えられる。

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\xi^2/2) \frac{d\xi}{dt} \qquad (18)$$

したがって変換式の接点では ξ および $d\xi/dt$ の値が一致していなければならない。例えば(2)と(17) とを $t=t_P$ でつなぐ場合を考える。

先ず(11) ~(12)を用いて増水部のパラメーターを定めておく。$t=t_P$ で ξ および $d\xi/dt$ が一致しなければならないから (19), (20) が成立する。

$$\xi_P = A \log t_P + B = a \left[\log (t_P + b) - \log (t_u - t_P) \right] + C \qquad (19)$$

$$A/t_P = a \left\{ \frac{1}{t_P + b} - \frac{1}{t_u - t_P} \right\} \qquad (20)$$

たゞし A; 増水部に対し定められた a の値

B; 増水部に対し定められた a の値

さらに第三の条件式として t_{50} の条件を用いると

$$0 = a \left[\log (t_{50} + b) - \log (t_u - t_{50}) \right] + C \qquad (21)$$

(17) のパラメーターも水文統計の場合と異り Unit Graph 解析の場合には (19) ~ (21) によって容易に求められるのである。増水部の変換式が(2)でなく(14) の場合も計算手順は全く同様である。

筆者らは本文に述べた方法を常呂川北見の流出に適用して，流出の非線形性を比較的容易に解析する事ができた。この実例は講演時に示す。