I －169　主成分分析法によるアーチダムの信頼度の検定

熊本大学工学部　正員　三池亮次

1、要旨

アーチダムのたわみと水圧荷重や堤体温度等の諸因子との間の回帰関係を重回帰分析によって検討する場合，因子相互の相関性がきわめて顕著であるため個個の因子の回帰係数の分散は大きくなり，たとえば堤体平均温度によるたわみと温度こう配によるたわみの和を求めることができても，両因子によるたわみに分離することはほとんど不可能であることが明らかにされている。

主成分分析は因子相互の相関係数を零とする新軸を求めることであって[1]，かくして新軸に対して重回帰分析を行えば，新軸に対する回帰係数の分散は小さくなり，残差平方和の変動の様相を因子のレベルで把握することが可能となる[2]。ここではまずその具体的計算方法を述べ，次に綾北ダムの昭和35年度以降のたわみの年度毎の解析を行い，たわみの観測量および回帰係数の分散の年度毎の変動に対して棄却検定の理論を適用することによって，アーチダムの信頼度を推定する方法を提案しようとするものである。

2、主成分分析の電子計算[2]

アーチダムの挙動解析におけるように常数項をもつ線型回帰模型に対しては，常数項を除く諸因子の相関係数マトリクスに対して固有値計算を行い新軸に変換するのが得策と考えられる。この場合の n 個の観測データの線型回帰模型を

$$y=\beta_0^{(1)}+X^{(1)}\beta^{(1)}+e \qquad \text{-----(1)}$$

ただし

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} & \cdots & x_{1p}^{(1)} \\ x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} & \cdots & x_{2p}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}^{(1)} & x_{n2}^{(1)} & \cdots & x_{np}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$y'=[y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n],\ \beta_0'=[\beta_0^{(1)}, \beta_0^{(1)}, \cdots\ \beta_0^{(1)}],\ \beta^{(1)}=[\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \cdots\cdots, \beta_p^{(1)}], e=[e_1, e_2, \cdots\cdots e_n]$$

とするとき，$X^{(1)}$は p 個の因子の n 組の測定値によるマトリクス，yは観測変量ベクトル，$\beta^{(1)}$は未知母数ベクトル，eはランダムノイズベクトル，$\beta_0^{(1)}$は常数項である。p 個の各因子の平均値および残差平方和の平方根は $i=1,2,\cdots,p$ に対して

$$\bar{x}_i^{(1)}=\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} x_{\alpha i}^{(1)} \qquad \text{---- (2)}$$

$$\sqrt{S_{ii}}=\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{n}(x_{\alpha i}^{(1)}-\bar{x}_i^{(1)})^2} \qquad \text{---- (3)}$$

である。ここで各因子の測定値を標準化し

$$x_{\alpha i}=(x_{\alpha i}^{(1)}-\bar{x}_i^{(1)})/\sqrt{S_{ii}} \qquad \text{-----(4)}$$

とすれば

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

に対して，線型回帰模型および正規方程式は

$$\boldsymbol{y}=\beta_0+\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{e} \qquad \text{----(5)}$$

$$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & X'X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Sigma y \\ X'y \end{bmatrix} \qquad \text{-----(6)}$$

上式において $R=X'X$ は相関係数マトリクスとなり，次式

$$\mathbf{U}=\mathbf{X}\mathbf{L} \qquad \text{-----(7)}$$

ただし

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1p} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{p1} & l_{p2} & \cdots & l_{pp} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1p} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{np} \end{bmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \cdots, \boldsymbol{l}_p] \qquad =[\boldsymbol{u}_1^{(n)}, \boldsymbol{u}_2^{(n)}, \cdots, \boldsymbol{u}_p^{(n)}]$$

によって X 座標系より U 座標系に直交変換すれば，新軸における線型回帰模型，正規方程式は

$$\boldsymbol{y}=\beta_0+\mathbf{U}\boldsymbol{\beta}_u+\boldsymbol{e} \qquad \text{-----(8)}$$

$$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & U'U \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Sigma y \\ U'y \end{bmatrix} \qquad \text{----(9)}$$

したがって

$$\hat{\beta}_0=\frac{1}{n}\Sigma y=\bar{y} \qquad \text{----(10)}$$

$$\mathbf{U}'\mathbf{U}\hat{\boldsymbol{\beta}}_u=\mathbf{U}'\boldsymbol{y} \qquad \text{-----(11)}$$

とすることができる。(6)式における $X'y$ の各要素は次式

$$\sum_\alpha x_{\alpha,i}y_\alpha=\sum_\alpha\frac{(x_{\alpha,i}^{(1)}-\bar{x}_i^{(1)})}{\sqrt{S_{ii}}}y_\alpha=\frac{1}{\sqrt{S_{ii}}}\left\{\sum_\alpha x_{\alpha,i}^{(1)}y_\alpha-\bar{x}_i^{(1)}\sum_\alpha y_\alpha\right\} \qquad \text{-----(12)}$$

によって計算が可能であり，相関係数マトリクス $R=X'X$ の各要素は，残差積和を S_{ij} とすれば

$$\Sigma x_i x_j=\frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}S_{jj}}} \qquad \text{-----(13)}$$

また R の固有値を

$$\lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_p \end{bmatrix}$$

とし，また(7)式における直交変換マトリクス $\mathbf{L}$ を R の固有マトリクスとするとき

$$\mathbf{U}'\mathbf{U}=\lambda \qquad \text{----(14)}$$

また，$U'y$ の各要素は次式によって計算する。すなわち

$$\boldsymbol{u}_i^{(n)\prime}\boldsymbol{y}=(X\boldsymbol{l}_i)'\boldsymbol{y}=\boldsymbol{l}_i'X'\boldsymbol{y}$$
$$=\sum_{j=1}^{p}l_{ji}\sum_\alpha x_{\alpha j}y_\alpha \qquad \text{-----(15)}$$

したがって次のAOV表を得，$\hat{\beta}_0$ および $\hat{\beta}_u$ の有意性を検定することが可能となる。U座標系における $\hat{\beta}_0$ および $\hat{\beta}_u$ の分散は小さく安定した値をとるべき筈であろう。

AOV表

SV	SS	DF	MS	F
0	$\frac{1}{n}(\Sigma y)^2$	1	$V_0=\frac{1}{n}(\Sigma y)^2$	V_0/V_e
1	$\frac{1}{\lambda_1}(u_1^{(m)\prime}y)^2$	1	$V_1=\frac{1}{\lambda_1}(u_1^{(m)\prime}y)^2$	V_1/V_e
2	$\frac{1}{\lambda_2}(u_2^{(m)\prime}y)^2$	1	$V_2=\frac{1}{\lambda_2}(u_2^{(m)\prime}y)^2$	V_2/V_e
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p	$\frac{1}{\lambda_p}(u_p^{(m)\prime}y)^2$	1	$V_p=\frac{1}{\lambda_p}(u_p^{(m)\prime}y)^2$	V_p/V_e
残差	$S_e=y'y-\frac{1}{n}(\Sigma y)^2-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i}(u_i^{(m)\prime}y)^2$	$n-(p+1)$	$V_e=\frac{S_e}{n-(p+1)}$	
T	$y'y$			

3．信頼度の検定

たわみの実測資料に対して重回帰分析を行うことにより検出される流動変形あるいは残差平方和の挙動に異常があるかどうかを観察することによりアーチダムの信頼度を推定する方法は，すでに考えられている。しかし因子のレベルでアーチダムの信頼度を検討するためには主成分分析法によらなければならないであろう。

さてアーチダムのたわみの重回帰分析における残差平方和および分散を S_e, σ^2 とし添字 $j=1,2,\cdots,m$ でたん水開始以降の年度数を表わすものとすれば

$$\frac{S_{e1}}{\sigma_1^2}\in\chi^2(n_1-p-1) \qquad \text{------ (16)}$$

$$\frac{S_{ej}}{\sigma_j^2}\in\chi^2(n_j-p-1) \qquad \text{------ (17)}$$

であるから $\sigma_1^2=\sigma_j^2$ の仮設に対して

$$\frac{\dfrac{S_{e1}}{n_1-p-1}}{\dfrac{S_{ej}}{n_j-p-1}}\in F(n_j-p-1,\,n_1-p-1) \qquad \text{------ (18)}$$

上式の左辺が有意水準5％における $F_\alpha(n_j-p-1,n_1-p-1;0.05)$ より大きいとき $\sigma_1^2=\sigma_j^2$ の仮設を棄却する。すなわち j 年度におけるたわみに対しては第1年度で考えられる因子では説明されない何らかの作用が加わったものと考えられる。その原因としては計器自身の精度の低下，クラックの発生その他外荷重に対するアーチダムの抵抗の構造形式の変化等が考えられる。

2．によって誘導された有意な u 軸を決定する変換マトリクスにより X 座標系を U_1 座標系に変換すれば、この U_1 の各軸とたわみ δ 軸が作る多次元直交座標系において，たわみ δ と U_1 因子との間の回帰平面はもし各因子のたわみに及ぼす効果が安定したものであれば多次元直交座標系に固定され，U_1 座標系の各軸に対する偏回帰係数もまた安定した定値をとるべきであろう。

したがっていま，たん水開始以降数年間の通しの資料に対して主成分分析によりU座標系に変換し，さらに重回帰分析によって有意な U_1 軸に対する変換マトリクス L_1 を求め，次にたん水開始以降たわみの資料を各年度毎に分割し，各年度毎の資料に対して上記の L_1 により U_1 座標系に変換し，最小二乗法により各因子の偏回帰係数 $\hat{\beta}_{uj}$ を求めれば，この $\hat{\beta}_{uj}$ の値はもしたわみが安定した挙動をとるなら，年度の如何にかかわらず定値をとる筈である。

主成分分析法により誘導された j 年度における u_i 軸に対する偏回帰係数 $\hat{\beta}_{ij}$ の有意性は次のようにして検定することができるであろう。以下 β の添字 u は省略する。

すなわち$\hat{\beta}_{ij}$に対する未知母数をβ_{ij}とし，$\hat{\beta}_{ij}$の誘導の過程に表われる逆マトリクスの対角要素をC_{ij}，j年度におけるyとU_iとの間の線型回帰模型における分散および残差平方和をσ_j^2，$S'e_j$ 有意な因子数をp'とするとき

$$\hat{\beta}_{ij}-\beta_{ij}\in N(0,C_{ij}\sigma_j^2) \qquad \text{------(19)}$$

$$\therefore \frac{(\hat{\beta}_{ij}-\beta_{ij})^2}{C_{ij}\,\sigma_j^2}\in \chi^2(1) \qquad \text{------(20)}$$

$$\frac{S'e_j}{\sigma_j^2}\in \chi^2(n_j-p'-1) \qquad \text{------(21)}$$

$$\therefore \frac{(\hat{\beta}_{ij}-\beta_{ij})^2}{C_{ij}\,S'e_j}(n_j-p'-1)\in F(1,n_j-p'-1;0.05) \qquad \text{------(22)}$$

上式において$\beta_{ij}=0$の帰無仮設に対して，左辺の値が有意水準5％における$F_\alpha(1,n_i-p'-1;0.05)$より大きい場合は$\beta_{ij}=0$の仮設は棄却され$\beta_{ij}$は有意と考えられる。

また$\hat{\beta}_{i1}$と$\hat{\beta}_{ij}$との間に差違があるかどうかの検定は次のようにすればよいであろう。すなわち

$$\hat{\beta}_{ij}-\beta_{ij}\in N(0,C_{ij}\sigma_j^2) \qquad \text{------(23)}$$

$$\hat{\beta}_{i1}-\beta_{i1}\in N(0,C_{i1}\sigma_1^2) \qquad \text{------(24)}$$

さて，$\beta_{ij}=\beta_{i1}$，$\sigma^2=\sigma_j^2=\sigma_1^2$ の仮設に対して

$$\hat{\beta}_{ij}-\hat{\beta}_{i1}\in N(0,\overline{C_{ij}+C_{i1}}\ \sigma^2) \qquad \text{------(25)}$$

$$\therefore \frac{(\hat{\beta}_{ij}-\hat{\beta}_{i1})^2}{(C_{ij}+C_{i1})\sigma^2}\in \chi^2(1) \qquad \text{------(26)}$$

また(21)式より

$$\frac{S'e_j+S'e_1}{\sigma^2}\in \chi^2(n_j+n_1-2\,\overline{p'+1}) \qquad \text{------(27)}$$

$$\therefore \frac{\dfrac{(\hat{\beta}_{ij}-\hat{\beta}_{i1})^2}{C_{ij}+C_{i1}}}{\dfrac{S'e_j+S'e_1}{n_j+n_1-2(p'+1)}}\in F(1,n_j+n_1-2\,\overline{p'+1}) \qquad \text{------(28)}$$

上式左辺の値が$F_\alpha(1,n_j+n_1-2\overline{p'+1};0.05)$より大きい場合は帰無仮設は棄却され$\hat{\beta}_{i1}$と$\hat{\beta}_{ij}$の間に差違があると判定されるであろう。

4. 適用例

昭和35年度より昭和41年度までの136個の綾北ダムのたわみの資料に対して主成分分析によりU軸に変換し，重回帰分析を行った結果1軸は棄却されL_1を得，その中主要な軸は平均温度および温度こう配によって構成されるu_3および流動変形と水圧荷重によって構成されるu_8の2軸であった。各年度毎の残差平方和に異常は認められなかったが，上記の主要な2個のu因子および常数項については明らかに年度毎に差違が認められ，水圧荷重および温度荷重に対する抵抗の構造形式が次第に変動しつつあることが示唆された。詳細は講演会当日報告する。電子計算は熊大FACOM-231を使用した。最後に本研究につき御教示を頂いた諸先生および資料を提供された宮崎県企業局に厚く謝意を表す。

参考文献 1) 中村慶一"技術者のための統計解析"山海堂　その他
2) 三池亮次"アーチダムの挙動解析における主成分分析の適用について"第21回土木学会学術講演会