

大阪市大 正員 倉田宗章
 大阪工大 正員 岡村宏一
 大阪市大 正員 O 島田 功
 大阪市大 学生員 岩波修身

序論 橋脚等に用いられる、標題の如き構造物に作用する荷重に対する応力の近似計算法を前回に於て報告した。今回は、逆対称に作用する荷重に対する厳密な解法を述べたもので、壁部は完全な2次元弾性体とし、ラーメンの変形については、せん断変形も考慮した。

以下、坪井善勝先生の剛節ラーメンで取囲まれた壁板の応力解析を行っておられる。

1 構造物の分解考察

U型ラーメンと耐震壁で補強した構造 (Fig. 1) を下端で固定されている。ラーメン構造と残りの壁部との2部分に分け、応力解析には、ラーメン部材長を壁板の長さと同じものとし、壁部とラーメン部との応力及び変形の連続条件は完全に満たすものとする。

2 記号

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{2l} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{2l}$$

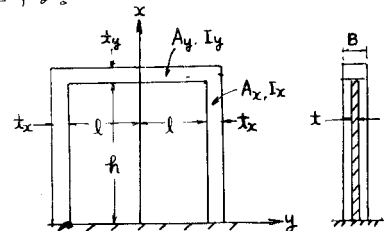
ν = ポアソン比

u, v = x, y 方向の変位

A_x, A_y = 柱及び梁の断面積

I_x, I_y = 柱及び梁の断面2次モーメント

t = 壁厚



t = 壁厚

Fig. 1

3 壁部の応力及び変形

Fig. 1 に示す直角座標系に於て、 x 軸に對し逆対称荷重が作用する場合、応力 σ_x, σ_y は y に因り奇関数、 τ_{xy} は偶関数であり、又下端 ($x=0$) 固定の条件を満足する応力函数 ϕ は次の形で表わされる。

$$\phi = \sum_m Y_m(y) \sin \alpha x + \sum_n Y'_n(x) \sin \beta y \quad \text{--- (3-1)}$$

$$\begin{cases} Y_m(y) = B_m \sinh \alpha y + C_m \alpha y \cosh \alpha y \\ Y'_n(x) = A'_n (\cosh \beta x - \frac{1+\nu}{2} \beta x \sinh \beta x) + B'_n \sinh \beta x + C'_n \beta x \cosh \beta x \\ \tau = E'' l \quad \beta \left\{ (1+\nu) B'_n - C'_n (1+\nu) \right\} + \sum_n \frac{2\alpha^2}{l(\alpha^2 + \beta^2)} \sin \frac{n\pi}{2} \left[B_m (1+\nu) \cosh \alpha l + C_m \left\{ (1+\nu) (\alpha l \sinh \alpha l - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} \cosh \alpha l) + 2 \cosh \alpha l \right\} \right] \end{cases}$$

応力及び変形

$$\begin{aligned} \sigma_x|_{x=l} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Big|_{x=l} = \sum_m \alpha^2 \sin \frac{m\pi}{2} \left\{ B_m \sinh \alpha y + C_m (2 \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y) \right\} - \sum_n \beta^2 \sin \beta y \times D_n \\ \sigma_x|_{y=l} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{y=l} = \sum_m \alpha^2 \sin \alpha x \left\{ B_m \sinh \alpha l + C_m (2 \sinh \alpha l + \alpha l \cosh \alpha l) \right\} - \sum_n \beta^2 \sin \frac{n\pi}{2} \times Y'_n(x) \\ \sigma_y|_{x=l} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = - \sum_m \alpha^2 \sin \frac{m\pi}{2} \times Y_m(y) - \sum_n \beta^2 \sin \beta y \times E_n \\ \sigma_y|_{y=l} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{y=l} = - \sum_m \alpha^2 \sin \alpha x \left\{ B_m \sinh \alpha l + C_m \alpha l \cosh \alpha l \right\} - \sum_n \beta^2 \sin \frac{n\pi}{2} \left\{ A'_n (\nu \cosh \beta x + \frac{1+\nu}{2} \beta x \sinh \beta x) - B'_n \sinh \beta x - C'_n (2 \sinh \beta x + \beta x \cosh \beta x) \right\} \end{aligned}$$

$$\tau_{xy}|_{x=h} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}|_{x=h} = -\sum_n \alpha^2 \cos \frac{n\pi}{2} \{B_n \cosh \alpha y + C_n (\cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y)\} - \sum_n \beta^2 \cos \beta y \times F_n$$

$$\tau_{xy}|_{y=l} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}|_{y=l} = -\sum_m \alpha^2 \cos \alpha x \{B_m \cosh \alpha l + C_m (\cosh \alpha l + \alpha l \sinh \alpha l)\}$$

$\geq T''$

$$\begin{cases} D_n = A'_n (\cosh \beta h - \frac{1+\nu}{2} \beta h \sinh \beta h) + B'_n \sinh \beta h + C'_n \beta h \cosh \beta h \\ E_n = A'_n (\nu \cosh \beta h + \frac{1+\nu}{2} \beta h \sinh \beta h) - B'_n \sinh \beta h - C'_n (2 \sinh \beta h + \beta h \cosh \beta h) \\ F_n = A'_n (\frac{1-\nu}{2} \sinh \beta h - \frac{1+\nu}{2} \beta h \cosh \beta h) + B'_n \cosh \beta h + C'_n (\cosh \beta h + \beta h \sinh \beta h) \end{cases}$$

$$E u|_{x=h} = -\sum_n \sin \beta y \left\{ \beta A'_n \left\{ \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{2} \sinh \beta h - \frac{(1+\nu)^2}{2} \beta h \cosh \beta h \right\} + \beta B'_n \frac{(1+\nu)^2}{1-\nu} \beta h \sinh \beta h \right. \\ \left. + \sum_m \frac{2\alpha^2}{l(\alpha^2+\beta^2)} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2} [B_m (1+\nu) \cosh \alpha l + C_m \{ (1+\nu) (\alpha l \sinh \alpha l - (1-\nu) \cosh \alpha l) + 2 \cosh \alpha l \}] \right\}$$

$$E v|_{y=l} = -\sum_m \alpha \sin \alpha x \{ B_m (1+\nu) \cosh \alpha l + C_m \{ (1+\nu) \alpha l \sinh \alpha l - (1-\nu) \cosh \alpha l \} \}$$

4-ラ- X 部の変形 (ラ- X 部材は長方形断面と仮定す)

$$\frac{d^2 u'}{dy^2} = \frac{M_y}{EI_y}$$

$$\frac{d^2 v'}{dx^2} = \frac{M_x}{EI_x} \quad \text{-----曲り変形}$$

$$\frac{du''}{dy} = -\frac{3}{2} \times \frac{Q_y}{A_y G}$$

$$\frac{dv''}{dx} = -\frac{3}{2} \times \frac{Q_x}{A_x G} \quad \text{-----せん断変形}$$

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{N_y}{EA_y}$$

$$\frac{d\bar{v}}{dx} = \frac{N_x}{EA_x} \quad \text{-----軸力による変形}$$

$$u = u' + u''$$

$$v = v' + v'' \quad \text{-----変位とひずみの変形}$$

Fig. 1. 左式は梁, 右式は柱に適用する式を表す。

a) 外荷重に及ぼすラ- X 部の変形 (添字 1 はこの場合を表す)

例として Fig. 2 に示す上部水平力 S の作用する時。

$$\text{鉛直圧力 } V = \frac{3R}{1 + \delta R + \frac{9I_y}{A_y l^2} (1+\nu) + \frac{3I_y R}{A_x l^2}} \times \frac{h}{2l} \times S \quad R = \frac{h \cdot I_x}{2l \cdot I_x}$$

変位 u, v は

$$E u_1 = \frac{V}{\delta I_y} \left\{ (l^2 - \frac{6I_y}{A_x} \times \frac{h}{l}) y - y^3 \right\} = -\frac{V}{I_y} \sum_n \sin \beta y \left\{ \frac{1}{3} l^2 + \frac{I_y}{A_x} \times \frac{h}{l} - \frac{1}{\beta^2} \right\} \times \frac{2}{l \beta^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$E v_1 = \frac{1}{4 I_x} \left\{ -\frac{S}{3} x^3 + (S h - 2 V l) x^2 + 6(1+\nu) S \times \frac{I_x}{A_x} \times x \right\}$$

$$= \frac{1}{I_x} \sum_m \sin \alpha x \left\{ \frac{S}{2} h^2 + \frac{S}{\alpha^2} - V h l + 3(1+\nu) S \times \frac{I_x}{A_x} - \frac{1}{\alpha} (S h - 2 V l) \sin \frac{m\pi}{2} \right\} \times \frac{1}{h \alpha^2} \sin \frac{m\pi}{2}$$

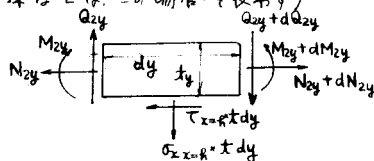
b) 壁部の応力に及ぼすラ- X 部材の変形 (添字 2 はこの場合を表す)

微小要素の均合を図に示す (Fig. 3)

$$\frac{dN_{zy}}{dy} = \tau_{xy}|_{x=h} \times t \quad \frac{dQ_{zy}}{dy} = -\sigma_x|_{x=h} \times t$$

$$\frac{dM_{zy}}{dy} = Q_{zy} + \tau_{xy}|_{x=h} \times t \times \frac{t_y}{2}$$

上式を積分すると右に示す。



t = 壁厚

Fig. 3

$$\frac{1}{t} N_{zy} = -\sum_n \sin \beta y \left\{ \beta F_n + \sum_m \frac{2\alpha^2}{l(\alpha^2+\beta^2)} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2} \{ B_m \cosh \alpha l + C_m (\alpha l \sinh \alpha l - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \cosh \alpha l) \} \right\}$$

$$\frac{1}{x} Q_{zy} = - \sum_n \alpha \sin \frac{n\pi}{2} \left\{ B_n \cosh \alpha y + C_n (\cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y) \right\} - \sum_n \beta \cos \beta y \cdot D_n + \sum_n C_{1n}$$

$$\frac{1}{x} M_{zy} = - \sum_n \sin \beta y \left[D_n + \frac{\beta y}{2} \cdot \beta \times F_n + \sum_m \left[\left(\sin \frac{m\pi}{2} + \frac{\beta y}{2} \cos \frac{m\pi}{2} \right) \frac{2\alpha}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \sin \frac{m\pi}{2} \left\{ B_m \cosh \alpha l \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + C_m (\alpha l \sinh \alpha l - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cosh \alpha l) \right\} - C_{1m} \times \frac{2}{l\beta^2} \sin \frac{m\pi}{2} \right] \right]$$

$$\frac{1}{x} E I_y u_2' = \sum_n \sin \beta y \left[\frac{1}{\beta^3} D_n + \frac{\beta y}{2} \cdot \frac{1}{\beta} \times F_n + \sum_m \sin \frac{m\pi}{2} \left[\left(\sin \frac{m\pi}{2} + \frac{\beta y}{2} \cos \frac{m\pi}{2} \right) \frac{2}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \alpha \left\{ B_m \cosh \alpha l \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + C_m (\alpha l \sinh \alpha l - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cosh \alpha l) \right\} + C_{1m} \times \frac{1}{\beta^2} \left(l^2 - \frac{2}{\beta^2} \right) + C_{2m} \times \frac{2}{l\beta^2} \right] \right]$$

$$\frac{1}{x} \times \frac{2}{3} G A_y u_2'' = \sum_n \sin \beta y \left[D_n + \sum_m \sin \frac{m\pi}{2} \left[\frac{2\alpha}{l(\alpha^2 + \beta^2)} \sin \frac{m\pi}{2} \left\{ B_m \cosh \alpha l + C_m (\alpha l \sinh \alpha l - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cosh \alpha l) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - C_{1m} \times \frac{2}{l\beta^2} \right] \right]$$

柱部も同じく同様:

$$\frac{1}{x} N_{zx} = - \sum_n \sin \alpha x \left\{ \alpha B_n \cosh \alpha l + \alpha C_n (\cosh \alpha l + \alpha l \sinh \alpha l) - \sum_n C_{1n} \times \frac{4}{m\pi} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right\}$$

$$\frac{1}{x} Q_{zx} = - \sum_n \alpha \cos \alpha x \left\{ B_n \sinh \alpha l + C_n \alpha l \cosh \alpha l \right\} - \sum_n \beta \sin \frac{n\pi}{2} \left[A_n' \left\{ \sinh \beta x - \frac{1+\nu}{2} (\sinh \beta x + \beta x \cosh \beta x) \right\} \right. \\ \left. + B_n' \cosh \beta x + C_n' (\cosh \beta x + \beta x \sinh \beta x) \right]$$

$$\frac{1}{x} M_{zx} = - \sum_n \sin \alpha x \left[B_n (\sinh \alpha l + \frac{\beta \alpha}{2} \cosh \alpha l) + C_n \left\{ \alpha l \cosh \alpha l + \frac{\beta \alpha}{2} (\cosh \alpha l + \alpha l \sinh \alpha l) \right\} \right. \\ \left. + \sum_m \sin \frac{m\pi}{2} \left[\frac{2\beta}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \sin \frac{m\pi}{2} \left[A_n' \left\{ \sinh \beta x + \frac{\beta}{2} \sin \frac{m\pi}{2} - \frac{1+\nu}{2} (\beta x \cosh \beta x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \sinh \beta x \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \frac{m\pi}{2} \right\} + B_n' \cosh \beta x + C_n' (\beta x \sinh \beta x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cosh \beta x) \right] - (A_n' \sin \frac{m\pi}{2} + C_{1n}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{4}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \right] \right]$$

$$\frac{1}{x} E I_y u_2' = \sum_n \sin \alpha x \left[\frac{1}{\alpha^2} B_n (\sinh \alpha l + \frac{\beta \alpha}{2} \cosh \alpha l) + \frac{1}{\alpha^2} C_n \left\{ \alpha l \cosh \alpha l + \frac{\beta \alpha}{2} (\cosh \alpha l + \alpha l \sinh \alpha l) \right\} \right. \\ \left. - \sin \frac{m\pi}{2} \sum_n \left[\frac{2}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \times \frac{1}{\beta} \sin \frac{m\pi}{2} \left[A_n' \left\{ (2+\nu) (\sinh \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \sin \frac{m\pi}{2}) - \frac{1+\nu}{2} (\beta x \cosh \beta x \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \sinh \beta x - \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \frac{m\pi}{2} \right\} + B_n' \cosh \beta x + C_n' (\beta x \sinh \beta x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cosh \beta x - 2 \cosh \beta x) \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{\alpha \alpha^2} \left[\frac{1}{\alpha n} B_n (\sinh \alpha_n l + \frac{\beta \alpha_n}{2} \cosh \alpha_n l) + \frac{1}{\alpha n} C_n \left\{ \alpha_n l \cosh \alpha_n l + \frac{\beta \alpha_n}{2} (\cosh \alpha_n l + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \alpha_n l \sinh \alpha_n l) \right\} + \frac{1}{\beta n} (B_n' - C_n') \right] - \frac{4}{\beta n} A_n' \frac{2+\nu}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} - (A_n' \sin \frac{m\pi}{2} + C_{1n}) \frac{2}{\beta^2} (1 - \frac{1}{\alpha n} \sin \frac{m\pi}{2}) \right] \right]$$

$$\frac{1}{x} \times \frac{2}{3} G A_x u_2'' = \sum_n \sin \alpha x \left[B_n \sinh \alpha l + C_n \alpha l \cosh \alpha l + \sum_n \frac{2\beta}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} \left[A_n' \left\{ \sinh \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \sin \frac{m\pi}{2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\beta(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} \times \frac{2}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} - \frac{1+\nu}{2} (\beta x \cosh \beta x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \sinh \beta x - \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \frac{m\pi}{2}) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + B_n' \cosh \beta x + C_n' (\beta x \sinh \beta x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cosh \beta x) \right] \right]$$

積分定数 C_{1m}, C_{2m} は $\tau-x$ 部材の連続条件 ($u_2' + u_2''$) _{$y=l$} = $u_2'|_{x=l}$, ($\frac{du_2'}{dy} + \frac{du_2''}{dx}$) _{$x=l$} = 0 より求める。よって α 式より、不斉定反力による、 $\tau-x$ 変位 u_2, v_2 は、

$$u_2 = u_2' + u_2'' \quad v_2 = v_2' + v_2''$$

5 壁部と $\tau-x$ 部材の連続条件

x 及 y 方向に於ける壁板と $\tau-x$ 部材の連続条件式を、

$$a). \text{変位の連続条件式} \quad u_1 + u_2 = u|_{x=l}, \quad v_1 + v_2 = v|_{y=l}, \quad (5-12)$$

b) 軸方向歪の連続条件式

$$\frac{1}{E I_y} \times \frac{\beta y}{2} (M_{1y} + M_{2y}) + \frac{1}{E A_y} (N_{1y} + N_{2y}) = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)|_{x=l} \quad (5-3)$$

$$\frac{1}{E I_x} \times \frac{\beta x}{2} (M_{1x} + M_{2x}) + \frac{1}{E A_x} (N_{1x} + N_{2x}) = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)|_{y=l} \quad (5-4)$$

(5-1, 2, 3, 4) 式が、 x, y の如何にかかわらず恒等的に成立するためには、前記の正弦フーリエ級数に展開した各式を代入し、 $B_m, C_m, A'_n, B'_n, C'_n$ を未定係数とし右次の各式をうる。

(5-1), (5-3) 式より、

$$\sum_m B_m P_{mn} + \sum_m C_m Q_{mn} + A'_n K_n + B'_n L_n + C'_n M_n = \Delta_n \quad (5-1')$$

$$\sum_m B'_m P'_{mn} + \sum_m C'_m Q'_{mn} + A'_n K'_n + B'_n L'_n + C'_n M'_n = E_n \quad (5-3')$$

(5-2), (5-4) 式より

$$B_m P_m + C_m Q_m + \sum_n B_n r_{mn} + \sum_n C_n s_{mn} + \sum_n A'_n t_{mn} + \sum_n B'_n l'_{mn} + \sum_n C'_n m'_{mn} = S_m \quad (5-2')$$

$$B'_m P'_m + C'_m Q'_m + \sum_n A'_n t'_{mn} + \sum_n B'_n l'_{mn} + \sum_n C'_n m'_{mn} = E_m \quad (5-4')$$

この4元方程式と (3-2) 式 ($u_{x=0} = 0$, なる条件式) とを連立に解くことにより、未定係数を求め、壁板及びラ－メン部の応力及び変形を定めることが出来る。

1. 数値計算例、

上部水平力 S が働く場合、Fig. 1 の各値に次の値を仮定し、計算を行う。

$h = 2.1$, 不平均比 $V = 0.3$, 幅 $B = 5$ 寸

$t_x = t_y = 0.1$ 寸

頂部隅角のラ－メンと壁板との変位適合状態を表に示す。

項次	ラ－メンの変位 - 壁板の変位		
	x方向の変位差 %寸	y方向の変位差 %寸	剪断変位差 %寸
1	-1.8	-17.8	-9.3
3	2.2	3.0	-2.1
5	0.21	-0.22	1.3

表-1

Fig. 4 にラ－メンと壁板との変形状態を図示し、表-1 を見てわかる様に、5項目では完全に適合されたものがないが、10項目ではすべてほぼ満足されるものと考へられる。

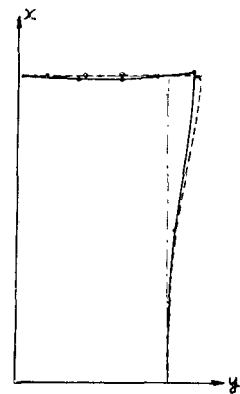
(参考文献)

(1) Y. Tsuboi "Rigid Frames and thin Plates on Lateral Forces"

Proceeding of the 1st Japan National Congress for App. Mech., 1951

(2) Y. Tsuboi "Stress Analysis of a Wall under Bending when Stiffened around by Rigid Frame"

Proceeding of the 2nd Japan National Congress for App. Mech., 1952



——壁板の変位
----ラ－メンの変位

Fig. 4