

鹿島建設株式会社 正員 坂本健次

鹿島建設株式会社 正員 荒木義典

まえがき

新潟地震以後、タンク中の液体の振動性状について各方面で研究が行われているが、それらの成果を直ちに耐震設計に役立たせるほど十分に究明されていないようである。この問題解明が困難な点は、線型方程式の理論から導かれる解に適用の限界があることとわらうのであるが、地震動の不規則さ、すなわち、全ての動きが共鳴の要素をもち、また、共鳴を抑える要素をもっているということである。

これらの問題は直ちに解決されるものではないが、本研究ではタンクの耐震設計に多少とも役立たせるため、自由水面をもつ円筒形タンク内部の液体の運動について、各種の仮定条件のもとに理論的な計算式を導くと共に、具体的な数値をあげて総体的な概念を得ることに努めた。

まず、将来地震波のスペクトラムとの関係を考慮するため波の固有周期を求め、次に、地震動のエネルギーが液の運動エネルギーになるものとして、波高を算出し、それらによってタンク壁面に働く圧力、転倒モーメントを求めた。これら理論式は今後実験を行なって理論の適応性を詳しく検討する必要がある。

1. 理論式の誘導1-1 仮定条件

理論式を導くために次の仮定条件を設けた。

- 1) 流体は完全流体と考える。
- 2) 流体と壁面の摩擦および表面張力は無視する。
- 3) 液高は流体の深さには十分小さいものとする。
- 4) 地震動による運動エネルギーは全て波動の運動エネルギーになるものとする。
- 5) タンク底面は荷重を受けても沈下しない。

1-2 自由振動

周知のように、速度ポテンシャルを円筒座標で示すと

$$\psi = A J_m(\alpha r) \frac{\sin m\theta}{\cos m\theta} \cosh \alpha(z+h) e^{i(\omega t + \epsilon)}$$

$$\text{ただし } z = -h \text{ で } \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

固有周期(T)および波高(S)は、表面波の条件(2)式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} - g z + F(z) \\ \frac{1}{g} &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0 \quad (z=0) \end{aligned} \right\} \text{----- (2)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{g \tanh \alpha h}} \text{----- (3)}$$

$$S = \frac{A}{g} i \omega J_m(\alpha r) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cosh \alpha(z+h)$$

なお、 α の値は、 $r = a$ で $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$ より1次より3次まで示すと表-1のようになる。

$m=1, m=0$ の場合について1次、2次、3次のmodeを示すと図1-1~6のようになる。

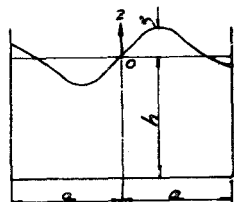


表-1 α の値

	$m=1$	$m=0$
1st mode	$\frac{0.586\pi}{a}$	$\frac{1.220\pi}{a}$
2nd mode	$\frac{1.697\pi}{a}$	$\frac{2.203\pi}{a}$
3rd mode	$\frac{2.717\pi}{a}$	$\frac{3.238\pi}{a}$

図1-1 $m=1$, 1st mode

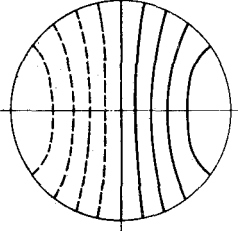


図1-2 $m=1$ 2nd mode

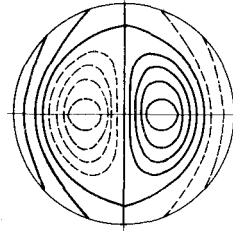


図1-3 $m=1$ 3rd mode

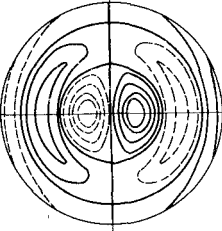
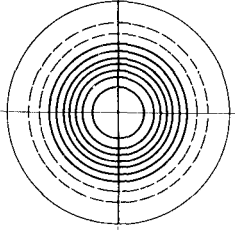


図1-4 $m=0$ 1st mode



1-3. 地震動を受けたときの波高および側壁に働く

く圧力、輻射モーメント 地震動を受けたとき如何なる mode の波が発生するかは、力学的条件より決るものであるが、これを純理論的に解明することは困難な問題が多い。したがって仮定条件で述べたように地震動運動エネルギーが全て波の運動エネルギーになるものとし、かつ図1-1に示したような mode の

波が起るとして波高その他を求めてみる。この仮定そのものは必ずしも不合理ではないが、木の運動が始まらないうちに地震動を受けることを仮定し、他方、地震動の周期が考えている固有振動周期に一致するとき、その固有振動が起ると考えており、ここにある矛盾があるが、概略の波高その他を得る一手段として計算を進めてみる。

1-3-1. 波高

$m=1$ の場合

波の運動エネルギー (E_w) は次式で表される。

$$E_w = \frac{\rho}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} r dr d\theta dz \quad (5)$$

(5)式に(1)式を代入して整理すると

$$E_{w m=1} = \frac{\rho \pi a^2}{8\alpha} K_1 \quad (6)$$

$$\text{ただし、} K_1 = (\sin h 2\alpha h + 2\alpha h) \left[\frac{\alpha^2 g^2}{2} \{ J_0^2(\alpha a) + J_1^2(\alpha a) \} - J_1^2(\alpha a) \right] + \frac{1}{2} (\sin h 2\alpha h - 2\alpha h) \{ (\alpha^2 h^2 - 1) J_1^2(\alpha a) \}$$

地震動を

$$y = a_0 e^{i(\alpha t + \epsilon)}$$

とすると、地震動によってタンク内の液体が獲得するエネルギーは、

$$E_E = \frac{\rho \pi a^2 h}{2} \rho (a_0 h)^2 n \quad (\text{ただし } n: \text{振動の回数}) \quad (7)$$

$E_{w m=1} = E_E$ より A が求められ (4)式より波高は次式のようになる。

$$\zeta_{m=1} = C_1 J_1(\alpha r) \sin \theta \sin \alpha h a_0 e^{i(\alpha t + \epsilon)} \sqrt{n} \quad (8)$$

$$\text{ただし } C_1 = \frac{2}{K_1} a_0 \sqrt{\alpha h}$$

$m=0$ の場合

$m=1$ の場合と同じように波高を求めると (7)式のようになる。

$$S_{m=0} = C_0 J_0(\alpha r) \sinh \alpha h \alpha_0 e^{i(\alpha t + \epsilon)} \sqrt{h} \quad \text{----- (9)}$$

$$\text{ただし } C_0 = \frac{1}{\sqrt{K_0}} \alpha \sqrt{2\alpha h}$$

$$K_0 = \frac{1}{2} (\sinh \alpha h \alpha_0 + 2\alpha h) \{ (\alpha^2 - 1) J_1^2(\alpha a) \} + (\sinh \alpha h - 2\alpha h) \left\{ \frac{\alpha^2 a^2}{2} \{ J_0^2(\alpha a) + J_1^2(\alpha a) \} \right\}$$

1-3-2 圧力および転倒モーメント

$m=0$ の場合はタンク全体として圧力は均合っており転倒モーメントは生じない。したがって $m=1$ の場合について計算する。(2)式の第1式より動圧力 (P_m)、動圧力による動転倒モーメント (M_m)、静圧力 (P_s)、静圧力による静転倒モーメント (M_s)は(10)式のようになる。

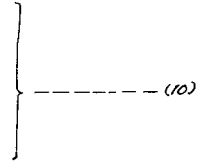
$$P_m = D_1 \frac{\pi}{\alpha} a (\cosh \alpha h - 1) \alpha_0 e^{i(\alpha t + \epsilon)} \sqrt{h}$$

$$M_m = D_1 \pi a \left\{ \frac{h}{\alpha} \cosh \alpha h - \frac{1}{\alpha^2} \sinh \alpha h \right\} \alpha_0 e^{i(\alpha t + \epsilon)} \sqrt{h}$$

$$P_s = D_1 \pi a h \sinh \alpha h \alpha_0 e^{i(\alpha t + \epsilon)} \sqrt{h}$$

$$M_s = D_1 \pi a \frac{h^2}{2} \sinh \alpha h \alpha_0 e^{i(\alpha t + \epsilon)} \sqrt{h}$$

$$\text{ただし } D_1 = C_1 \rho g J_1(\alpha a)$$



2. 数値計算結果

我が国で現在建設されている C.R. タイプのオイルタンクの容量と直径の関係および直径と高さの関係は図 2-1~2 に示すとおりである。数値計算は、直径 $D = 20 \text{ m} \sim 60 \text{ m}$ のものについて行なう。液体の単位重量は 1 t/m^3 とした。

2-1 理論式の適用範囲

1 で導いた理論式で数値計算を行なう場合、深水表面波という条件が如くなる範囲まで適用できるかということである。周期および波高を求める式より β に関する項 $\frac{1}{\tanh \alpha h}$, $\frac{1}{K_1}$, $\frac{\sinh \alpha h}{\sqrt{K_0}}$ ととりおし, $\beta = \frac{h}{D}$ として β に関する変化の模様を示すと、図 3-1, 2 のようである。工学的に 10% 程度の誤差は許容できるものとするとき深水表面波の条件が適用できる β の値は表-2 のようである。

図 2-1 容量と直径の関係

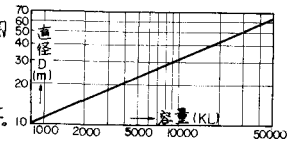


図 2-2 直径と高さの関係

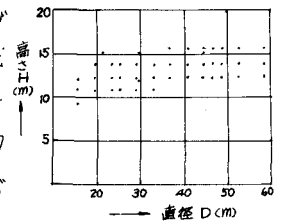


表-2 β の最大値

	$m=1$	$m=0$
1st mode	0.3	0.2
2nd mode	0.1	0.1
3rd mode	0.07	0.07

図 3-1 β と $\frac{1}{\tanh \alpha h}$ の関係

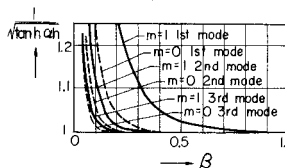
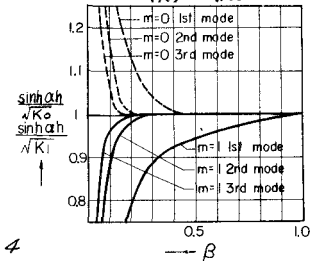


図 3-2 β と $\frac{\sinh \alpha h}{\sqrt{K_0}}$ の関係



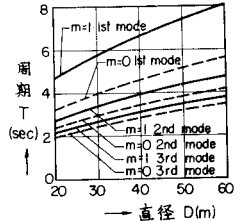
2-2 固有周期 (T)

タンク直径 $D = 20 \text{ m} \sim 60 \text{ m}$ までの各 mode の固有周期を求めると図-4 に示す通りである。固有周期は、 D が大きくなるにしたがって大体直線的に大きくなり 2nd mode, 3rd mode の場合は $m=1$, $m=0$ のいずれの場合も大差ない値を示している。

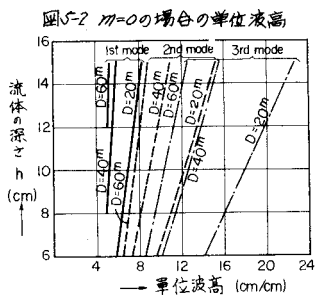
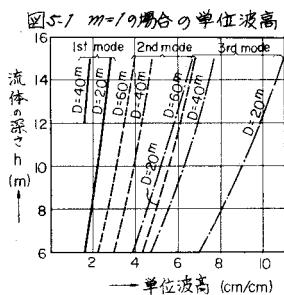
2-3 波高 (S)

タンク直径 $D = 20 \text{ m} \sim 60 \text{ m}$ について β と単位波高の最大値との関係を計算すると図 5-1, 2 のようである。ここで単位波高とは (2) (9) 式の $\alpha_0 e^{i(\alpha t + \epsilon)} \sqrt{h}$

図-4 D と T の関係



を除いたものがある。すなわち、地震動の振幅を単位とし地震動によるエネルギーの供給が1回とした場合の波高の最高値である。実際の波高は地震動の振幅と振動の回数の平方根を乗じたものとして求まる。単位波高は振動の次数が大きくなるに従って大きくなり、水深が深くなるに従って大体直線的に大きくなり、また、 λ が同じ場合、 D が小さくなるほど単位波高も大きくなる。



2-4 圧力(P_m, P_s)および転倒モーメント(M_m, M_s)

D と λ と単位動圧力、単位静圧力および単位動転倒モーメント、単位静転倒モーメントの関係を示すと図6-1,2の通りである。ここで、上に圧力等にした単位の意味は2-3波高で述べた通りである。単位動圧力、単位静圧力は波高と同じような傾向を示すが、単位静圧力の方が単位動圧力より全体的に大きな値を示し、 λ による変化の割合も大きくなっている。

図6-1 単位動圧力、単位静圧力

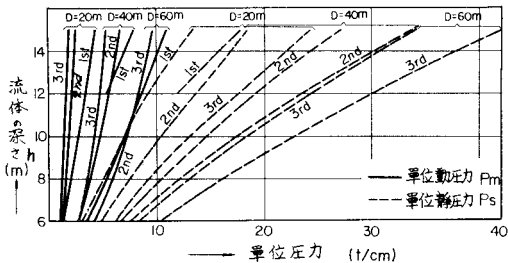
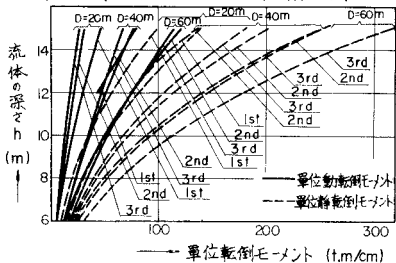


図6-2 単位動転倒モーメント・単位静転倒モーメント



単位転倒モーメントも単位圧力と同じような傾向を示すが、単位圧力の場合に比べ静圧力と動圧力の差が少ない。これは、動圧力の場合、合力の作用点が表面に近い所にあるためと考えられる。

以上、数値計算を各種行ったが、いずれの場合も振動の

次数が大きくなるに従って各値が大きくなっている。これは地震動によって与えられるエネルギーを変えたいためであり、地震動のスペクトラムを如何に考えるかで異ってくる。

3. 総括

今回の研究の結果、次のようなことがいえる。

- (1) 波高、圧力、転倒モーメントは全て振動の回数 λ の平方根に比例するという結果になった。一般に共鳴する場合、 λ に比例するが地震動の複雑さ、水の波の複雑さを考慮すると実験を行なう両者の長短を決定すべきであろう。
- (2) 振動の次数が高くなるにしたがって、波高、圧力、転倒モーメントは大きくなるが、地震動のスペクトラムを速度一定とし地震動によって与えられるエネルギーを一定にすると、その傾向は異ってくる。
- (3) 圧力および転倒モーメントに関しては、動的な値に比べ、静的な値が支配的である。

おとがき

本研究にあたって終始ご指導いただいた東京大学地震研究所吉山良一教授に深く感謝します。