

九大工学部 正員 小坪清眞  
同 大学院 学生員 ○花田和史

### 1. まえがき

地震やその他の外力により地中構造物が振動を生ずる際には、地盤が構造物に及ぼす反力として、構造物の変位に比例する静的地盤反力、および、構造物の振動に従って振動するまわりの基礎地盤の慣性力があけられる。この動的地盤反力は、地盤と構造物の物理的諸元によって異なるものであるが、これを求めることは、特に構造物の地震に対する応答を計算する上に重要である。

本論は、地盤を弾性体とみなし、円筒形構造物が水平振動をする場合の地盤反力を三次元波動方程式より求め、振動数と地盤反力との関係を明きらかにし、あわせて土の附着質量についての考察を行ったものである。

### 2. 地盤に関する基礎方程式とその解

円筒座標  $(r, \theta, z)$  を図-1のように設け、 $r, \theta$  方向の変位を  $u, v$  とする。地盤に対して均質弾性体の波動方程式を適用すれば、次のようになる。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \quad (2)$$

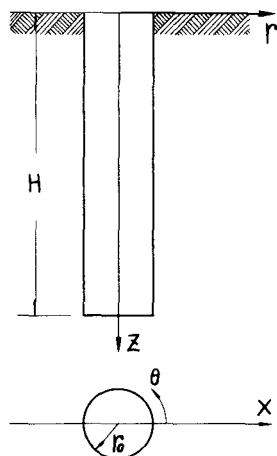
$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$2\mu r = -\partial v / \partial z \quad (3)$$

$$2\mu \theta = \partial u / \partial z$$

$$2\mu z = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r v) - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\}$$

図-1



ここで、 $\lambda, \mu$  は Lamé の定数、 $\rho$  は密度を表す。

i)  $\rho \omega^2 > \mu \left( \frac{\pi}{2H} \right)^2$  の場合、 $k_p = \sqrt{\frac{\rho \omega^2 - \mu \left( \frac{\pi}{2H} \right)^2}{\lambda + 2\mu}}$  (4)

$$k_s = \sqrt{\frac{\rho \omega^2 - \mu \left( \frac{\pi}{2H} \right)^2}{\mu}} \quad (5)$$

ii)  $\rho \omega^2 < \mu \left( \frac{\pi}{2H} \right)^2$  の場合、 $k_p' = \sqrt{\frac{\mu \left( \frac{\pi}{2H} \right)^2 - \rho \omega^2}{\lambda + 2\mu}}$  (6)

$$k_s' = \sqrt{\frac{\mu \left( \frac{\pi}{2H} \right)^2 - \rho \omega^2}{\mu}} \quad (7)$$

今、円筒形構造物が、X軸方向に振動する時、水平方向変位  $y(z)$  は Fourier 展開により、

$$y(z) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \delta_n \cos \frac{n\pi z}{2H} \quad (8)$$

で表わされる。従って波動方程式の解として、次式を得る。

$$u = \sum_{n=1,3,5,\dots}^m E_n \cos \theta \left\{ \begin{aligned} & \left[ \begin{aligned} & \{Z_R J_2(K_S r_0) + Z_I Y_2(K_S r_0)\} \{J_0(K_R r) - J_2(K_R r)\} \\ & + \{Z_I J_2(K_S r_0) - Z_R Y_2(K_S r_0)\} \{Y_0(K_R r) - Y_2(K_R r)\} \\ & + \{Z_R J_2(K_P r_0) + Z_I Y_2(K_P r_0)\} \{J_0(K_S r) - J_2(K_S r)\} \\ & + \{Z_I J_2(K_P r_0) - Z_R Y_2(K_P r_0)\} \{Y_0(K_S r) - Y_2(K_S r)\} \end{aligned} \right] \cos \omega t \\ & + \left[ \begin{aligned} & \{Z_R J_2(K_S r_0) + Z_I Y_2(K_S r_0)\} \{Y_0(K_R r) + Y_2(K_R r)\} \\ & - \{Z_I J_2(K_S r_0) - Z_R Y_2(K_S r_0)\} \{J_0(K_R r) + J_2(K_R r)\} \\ & + \{Z_R J_2(K_P r_0) + Z_I Y_2(K_P r_0)\} \{Y_0(K_S r) + Y_2(K_S r)\} \\ & - \{Z_I J_2(K_P r_0) - Z_R Y_2(K_P r_0)\} \{J_0(K_S r) + J_2(K_S r)\} \end{aligned} \right] \sin \omega t \end{aligned} \right\} \\ + \sum_{n=m+1, \dots}^{\infty} F_n \cos \theta \left\{ K_2(K_S r_0) \{K_0(K_R r) + K_2(K_R r)\} + K_2(K_P r_0) \{K_0(K_S r) - K_2(K_S r)\} \right\} \cos \omega t \quad (9)$$

$$v = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^m E_n \sin \theta \left\{ \begin{aligned} & \left[ \begin{aligned} & \{Z_R J_2(K_S r_0) + Z_I Y_2(K_S r_0)\} \{J_0(K_R r) + J_2(K_R r)\} \\ & + \{Z_I J_2(K_S r_0) - Z_R Y_2(K_S r_0)\} \{Y_0(K_R r) + Y_2(K_R r)\} \\ & + \{Z_R J_2(K_P r_0) + Z_I Y_2(K_P r_0)\} \{J_0(K_S r) + J_2(K_S r)\} \\ & + \{Z_I J_2(K_P r_0) - Z_R Y_2(K_P r_0)\} \{Y_0(K_S r) + Y_2(K_S r)\} \end{aligned} \right] \cos \omega t \\ & + \left[ \begin{aligned} & \{Z_R J_2(K_S r_0) + Z_I Y_2(K_S r_0)\} \{Y_0(K_R r) - Y_2(K_R r)\} \\ & - \{Z_I J_2(K_S r_0) - Z_R Y_2(K_S r_0)\} \{J_0(K_R r) - J_2(K_R r)\} \\ & + \{Z_R J_2(K_P r_0) + Z_I Y_2(K_P r_0)\} \{Y_0(K_S r) - Y_2(K_S r)\} \\ & - \{Z_I J_2(K_P r_0) - Z_R Y_2(K_P r_0)\} \{J_0(K_S r) - J_2(K_S r)\} \end{aligned} \right] \sin \omega t \end{aligned} \right\} \\ - \sum_{n=m+1}^{\infty} F_n \sin \theta \left\{ K_2(K_S r_0) \{K_0(K_R r) - K_2(K_R r)\} + K_2(K_P r_0) \{K_0(K_S r) + K_2(K_S r)\} \right\} \cos \omega t \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} E_n &= \frac{\delta_n}{Z_R^2 + Z_I^2} \cos \frac{n\pi z}{2H} & F_n &= \frac{\delta_n \cos \frac{n\pi z}{2H}}{K_0(K_P r_0) K_2(K_S r_0) + K_2(K_P r_0) K_0(K_S r_0)} \\ Z_R &= J_0(K_P r_0) J_2(K_S r_0) + J_2(K_P r_0) J_0(K_S r_0) - Y_0(K_P r_0) Y_2(K_S r_0) - Y_0(K_S r_0) Y_2(K_P r_0) \\ Z_I &= J_0(K_P r_0) Y_2(K_S r_0) + J_0(K_S r_0) Y_2(K_P r_0) + J_2(K_P r_0) Y_0(K_S r_0) + Y_0(K_P r_0) J_2(K_S r_0) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$m$  は、 $3\omega^2 > \mu(n\pi/2H)^2$  を満足する最大の  $n$  である。 $J$ 、 $Y$  は Bessel 函数、 $K$  は変形 Bessel 函数である。又、[ ] 内の第 1, 2 項は疎波による変位、第 3, 4 項はせん断波による変位を示している。なお、上式誘導の途中で、後進波を示す第 1 種の Hankel の函数、および  $r \rightarrow \infty$  の時、無限大となる第 1 種の変形 Bessel 函数を除いた。

### 3. 地盤反力

(9), (10), (11) で得た  $u, v$  を、 $u = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \delta_n f(r, t) \cos \frac{n\pi z}{2H} \cos \theta$ ,

$v = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \delta_n g(r, t) \cos \frac{n\pi z}{2H} \sin \theta$  の形で考えると

各  $n$  に対応する単位深さあたりの地盤反力  $p_n(z)$  は、 $\delta_n = 1$  として、

$$p_n(z) = \frac{E b_0 \pi}{1-\nu^2} \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{r=r_0} - \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial r} \right)_{r=r_0} \right\} \cos \frac{n\pi z}{2H} \quad (12)$$

但し、 $E$ : 弾性係数、 $\nu$ : Poisson 比

従って F 字形構造物の受ける全地盤反力  $P$ 、及びその作用点を求めると、

$$P = \frac{2H}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{\delta_n p_n(0)}{n} \quad (13)$$

$$Z_0 = \left\{ 1 - \frac{2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\delta_n p_n(0)}{n}}{\pi \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{\delta_n p_n(0)}{n}} \right\} H \quad (14)$$

### 4. 数値計算例 — 杭 —

$E = 100 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $b_0 = 50 \text{ cm}$  とし数値解を求めてみた。

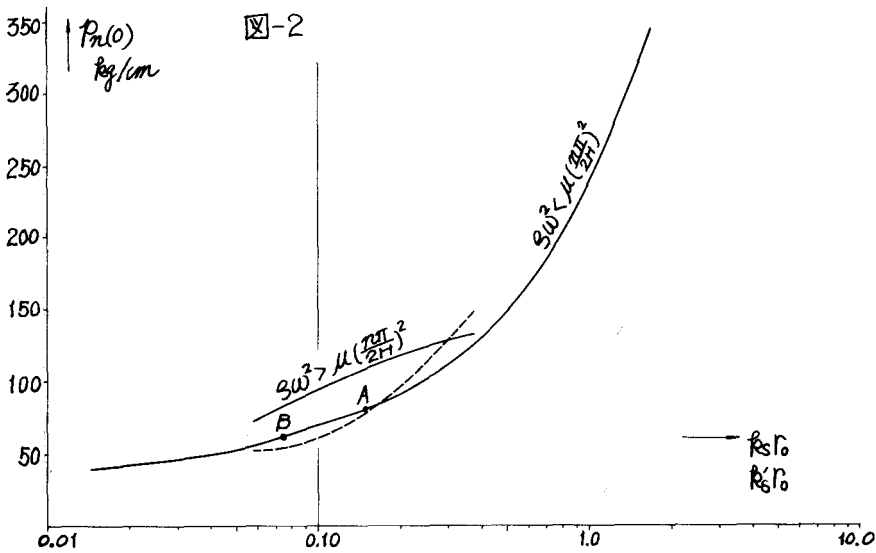


図-2は  $R_s b_0$ 、及び  $R_b b_0$  による杭の単位深さあたりの地盤反力の変化を示す。(5) (7) 式と、この図から、 $H, \omega, n$  を定まれば、 $p_n(0)$  を求めることができる。例えば、図中の A, B 点は、 $\omega = 0$  (静的) の場合の  $H = 5 \text{ m}$ ,  $H = 10 \text{ m}$  の  $p_1(0)$  である。 $S\omega^2 = \mu(\pi/2H)^2$  なる点では、 $p_n(0) = 0$  となる。なお、破線は、 $S\omega^2 > \mu(\pi/2H)^2$  の場合の減衰力を表わしている。

図-2より、杭が直線的変位をした時の全地盤反力を計算したのが図-3、図-4である。

この時、(13)式は、
$$p = \frac{16H}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{p_n(0)}{n^3} \quad (13)'$$

(14)式は、
$$Z_0 = \left\{ 1 - \frac{2p_1(0)}{\pi \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{p_n(0)}{n^3}} \right\} H \quad (14)'$$

項数は5個 ( $n=1, 3, 5, 7, 9$ )まで採った。

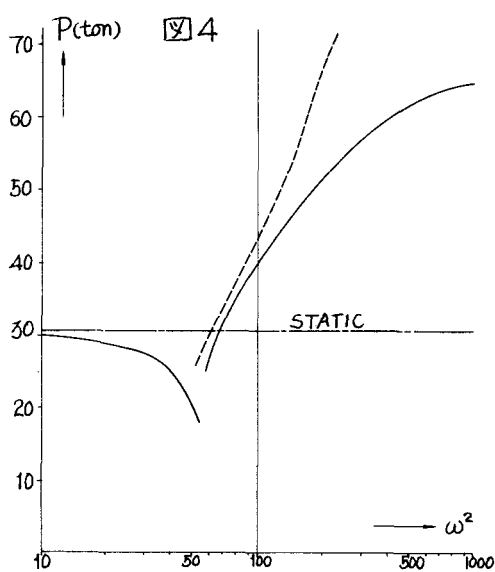
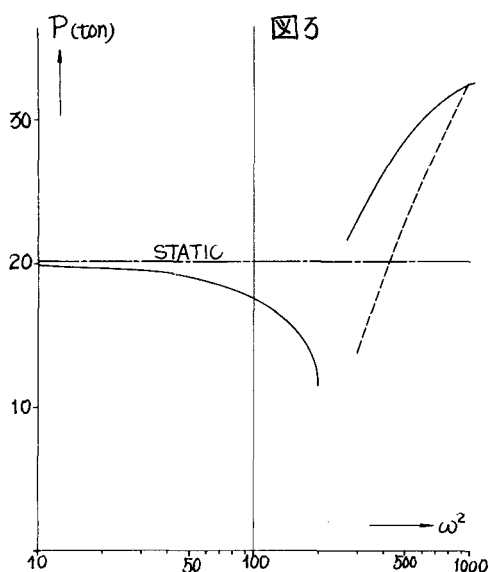


図-3は  $H=5m$  の場合の、図-4は  $H=10m$  の場合の、地盤反力の振動数による変化を示す。図中の破線は減衰力を表している。又、作用点は、 $H=5m$  の場合は杭頭より  $0.31 \sim 0.39H$  の点、 $H=10m$  の場合には  $0.31 \sim 0.36H$  の位置にある。図から、振動数を増すとある特定の振動数のところまでは地盤反力は減り、それを過ぎると反力の増大することが、前者の静的地盤反力との差が、土の横性力であり、後者の増大は、振動数の増加により波長が短くなり、ひびきが大きくなったが響が他の要素に比して大きく出ているからであろう。以上のことから、従来の、振動数にかかわらず一定量の土が杭に附着しているとみなす附着質量の考え方には、多少の問題があると思われる。