

東大生研 正員 久保慶三郎

○佐藤 暢彦

1 はじめに 最近、電子計算機の発達により 連続構造体などの地震時応答計算が広く一般に行われるようになったが この際構造体そのままでは自由度が多すぎてとても解が得られるものではなくしたがつて その構造体を有限個の自由度に拘束しこの計算を実行している。この有限個の自由度に拘束する方法には多くの力学モデル——その構造体の分布している質量を構造体の有限個の代表的な点に集中させた質点系——に置換している。しかし この力学モデルの作成にはこれといった方法もなく、したがって考え方によって種々のモデルができるが、この各モデルの得失はまだ解析されていないのである。ここに このように構造体を力学系モデルに置換することとをすけ 構造体そのものの系で計算する方法を試みた。この試みは構造体の変形状態を表わすのに必要と思われるような代表的な点を選びその点の変位を未知数とし、他の点の変位は代表的な点の変位から一次的に導かれるものとして自由度を有限個にした。そして この試案と種々の力学モデルに置換する方法および実験による結果を一つの試験体について求め比較検討してみると、試案は固有振動周期については非常に高い精度をもっており 応答計算については力学モデルに置換する方法よりいく分よい結果で得られた。

2 運動方程式と応答計算 簡単のために図-1(a)に示すような構造体について運動方程式を誘導し応答計算法について説明しよう。構造体は図に示すように集中的な質量 m_i をもつ物体とそれらも連結する奇材からなり、その部材は単位長さ当り重量 γ をもっている。代表的な点を各質量 m_i の質点に選ぶこととし、かりに固定端の変位 y をしたためにその点に固定端に対して相対変位 x_i を生じたとする。この時の変形状態は図-1(b)のように折れ線状で表わされるように向束すれば、絶対加速度の分布も図-1(c)のようになり同じ折れ線状であり、この分布を図のように三角分布に分割することができる。ここに図-1(d)のように j 点では $-1\%g$ 、その他の点では 0 なる三角単位加速度分布を考へこの加速度による慣性力の分布が図-1(e)のようになって、その時の各点の変位は求められ β_{ij} をもってこのときの i 点の変位を表わそう。また質量 m_i による慣性力を考慮するために flexibility coefficient を導入し f_{ij} で表わす。ここに 固定端の変位 y によるこの系の運動方程式は各標準振動の減衰係数を一定にして n で表わして次のようになる。

$$-(B+FM)(\ddot{x}+2n\dot{x})-\ddot{y}d=x \quad (1)$$

ここで B, F は正方行列で各要素は β_{ij}, f_{ij} であり M は対角要素のみ存在しその値は m_i である正方

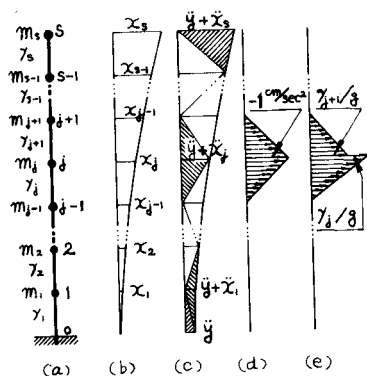


図-1

行列である。 X, d はベクトルで前者は $\ddot{x}_i$ 後者は $\ddot{y}_0$ を要素とする。

$$A = (B + FM)^{-1}, \quad a_0 = A^{-1} \cdot d \quad (2)$$

とおけば (1) 式は次のようになる。

$$\ddot{x} = -A \cdot x - 2\pi \dot{x} - \ddot{y}_0 a_0 \quad (3)$$

減衰のない自由振動の式は $\ddot{x} = -A x$ となり $x = C \sin \omega t$ を代入すれば：

$$A C = \omega^2 C \quad (4)$$

この式より固有値と固有ベクトルの組が得られ固有値の小さいものから順番につける番目の解を ω_i^2 , C_i として表わすこととし新しく ω_i^2 が対角要素となり他の要素は全て 0 である正方行列 R と C_i が i 番目の列をなす行列 W を導入すれば A とこれらの行列との間に次の関係がある。

$$A \cdot W = W R, \quad \text{すなわち} \quad R = W^{-1} \cdot A \cdot W \quad (5)$$

またベクトル X と他のベクトル Z と次のように関係づける。

$$X = W Z \quad \text{または} \quad Z = W^{-1} X \quad (6)$$

この (5) と (6) の関係式を (3) 式に適用し整理のち：

$$\ddot{Z} = -R Z - 2\pi \dot{Z} - \ddot{y}_0 a \quad (7)$$

$$\text{ただし} \quad a = W^{-1} a_0 \quad (8)$$

この (7) 式および行列 R が対角要素のみ存在することに注目すれば (7) 式が各要素ごとく全く独立していることがわかり次のように一つの要素ごとについて表わすことができる。

$$\ddot{z}_i + 2\pi \dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = -a_i \ddot{y}_0 \quad (i=1 \sim S) \quad (9)$$

すなわち この式は各規準振動の周期をもつ自由振動の方程式である。

さて (9) 式の $\ddot{y}_0$ は固定端の加速度である時間間隔 Δt ごとにその値が知られているので図-2 のようにこれを直線で結んだ折れ線として $\ddot{y}_0$ を考える。今かりに図の時刻 t と $t+\Delta t$ との間における (9) 式の解を導けば次のようである。

$$\left. \begin{aligned} z_i &= e^{-\pi t} (C_i \cos p_i t + C'_i \sin p_i t) + U_i t + V_i \\ \text{ただし} \quad U_i &= -\frac{a_i}{\omega_i^2} - \frac{\ddot{y}_0 - \ddot{y}_1}{\Delta t}, \quad V_i = -\frac{a_i}{\omega_i^2} \ddot{y}_1 + 2\pi \frac{a_i}{\omega_i^2} \frac{\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1}{\Delta t}, \quad p_i = \sqrt{\omega_i^2 - \pi^2} \end{aligned} \right\} \quad (i=1 \sim S) \quad (10)$$

ここで $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2$ は図-2 に示す値であり C_i, C'_i は $t=0$ における $z_i, \dot{z}_i$ の値 $z_{0i}, \dot{z}_{0i}$ より決定される。

$$C_i = z_{0i} - V_i, \quad C'_i = (\dot{z}_{0i} + \pi C_i - U_i) / p_i \quad (i=1 \sim S) \quad (11)$$

したがって (9) 式の完全な解が得られたわけである。つまり入力加速度の読み取られた時間間隔ごとに (10) 式の U_i, V_i を入力加速度からまた C_i, C'_i はすぐ前の時間間隔の最後の $z_i, \dot{z}_i$ の値から決めて、今考えている時間間隔内での応答を得るのであり、 z_i などの値が求まれば (6) 式から変位、速度を得さらに (3) 式から加速度を得、必要に応じて断面力などを算出する。実際に応答計算をする場合には (10) 式などの i について i までぐらいいまで計算してそれ以外の応答は 0 としても十分な結果を得ることができる。

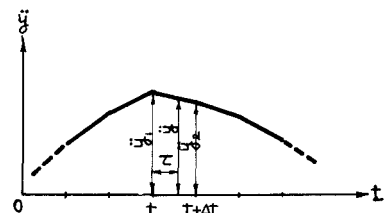


図-2

3 一例についての計算と実験 試案および種々の力

味するために図-3のような試験体を作り計算と実験をした。計算としては試案および種々の力学モデルの場合について自由度 n を2~5と変化することによって一次固有振動周期がいかに厳密解^{*}の0.7463秒に収束していくかを調べた。その結果は表-1である。ここで種々の力学モデルの作り方は例えば $n=4$ の場合について図-4に示すようになって 重量は各カッコ内の総和をとり、試案は等間隔に点をとる。また $n=4$ のときの各規準振動周期について求めれば表-2のようである。

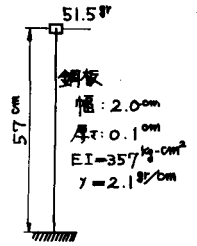


図-3

次に応答計算をするために 自由振動から減衰定数を測定し、また固定端を手振りで振動させて一つのランダム波を起し、このときの固定端、上端へ加速度および下端の曲げモーメントを測定した。この結果 減衰定数は0.028となり、そして加速度および曲げモーメントについての波形を得 これを1/50秒ごとに値を読み取り図-5に示した。一方 応答計算は(9)式の $\ddot{y}$ に固定端へ加速度記録を適用し各系について上端の加速度および下端の曲げモーメントの応答を求めてみれば、A系とC系、B系とD系はほぼ一致した応答曲線を得たので 試案とC系、D系についての応答曲線のみを図-5に示した。なおこの計算結果も1/50秒ごとにそして最初の2秒間について求めた。

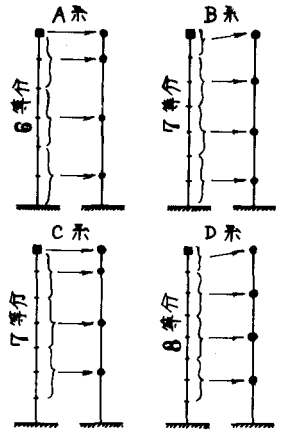


図-4

4. 考察 一次振動周期については 試案が非常に高い精度をもっていることがわかる。すなわち $n=2$ のときの試案の厳密解に対する誤差は+0.0035秒で0.5%弱であり 力学モデルC系の $n=5$ のとき n 解を試案では $n=2$ で得ることができた。

またこの解の厳密解への収束状態は試案、B、D系は高い方から 逆にA、C系では低い方から近づくことがわかり 力学モデルの中ではC系が一番よい収束を示している。高次の振動周期については 厳密解と比較して 誤差が低くなるにつれて試案では小さくなるのに反して 力学モデルに置換する方法では その途中で一番精度がよくなくなる傾向があり、4つの方法とも一次の振動周期がもっとも誤差が大きい。ここで低次の規準振動とは構造体の挙動に寄与する影響が大であることと考へれば、試案の傾向が望ましく 力学モデル系ではC系が

表-1

単位 sec.

S	試案	A系	B系	C系	D系
2	0.7498	0.6666	0.8052	0.7159	0.7799
3	0.7477	0.7291	0.7678	0.7354	0.7612
4	0.7471	0.7387	0.7573	0.7408	0.7547
5	0.7467	0.7421	0.7528	0.7430	0.7517
厳密解	0.7463				

表-2

単位 sec.

次数	厳密解	試案	A系	B系	C系	D系
1	0.7463	0.7471	0.7387	0.7573	0.7408	0.7547
2	0.0925	0.0898	0.0907	0.0950	0.0914	0.0945
3	0.0304	0.0274	0.0301	0.0316	0.0311	0.0316
4	0.0149	0.0125	0.0195	0.0146	0.0189	0.0172

* 岡本洋三著：地震力を考へた構造物設計法 オーム社 P.P. 122

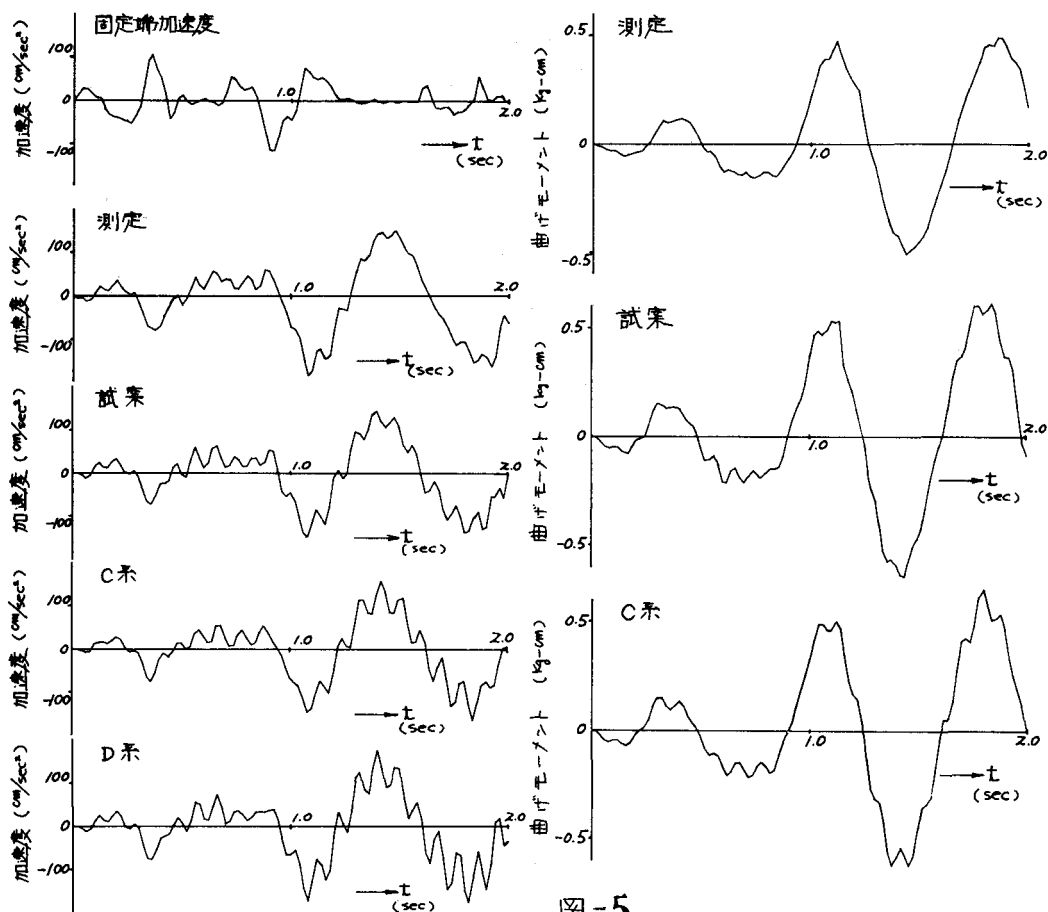


図-5

かといえる。

応答計算結果については先述したように A系とC系およびB系とD系とはほとんど同等であったが、これは上端の名応答への影響が大々いことを考えれば、上端の力字モデルの作り方が同じであることより説明できる。また加速度応答については計算値はオニズ振動の評価が全般的に測定値より大きくなっているが、その中で試算がもっとも小さく求まっている。また曲げモーメント応答については、さほど優劣がないが、試算とC系の併がよく測定値に類似している。応答の絶対値については、加速度では小さめに、曲げモーメントでは大きめに計算値が得られたが、これは高次振動を計算値が大に評価したためであろう。また、0.7秒あたりの細かい波は計算値と測定値に相違が認められるが、これは入力波がこの付近で細かく1/50秒間隔での読み取りではまだ十分でなかったためである。

結局、ここに提案した試算は固有振動周期については非線形による精度をもち、応答についてもよい結果をもたらす。また力字モデルへ置換する方法ならば、C系のようにモデルを作るのがよい。

しかし、ただ一例についてのみ議論しているのみであり、一般的な結論とはならず、今後、もっと他の構造体について検討する必要がある。