

京都大学工学部 正員 山田善一  
 金沢大学工学部 正員 ○小堀爲雄  
 京都大学工学部 学生員 中村幾雄

### 1. まえがき

この研究は道路橋と自動車の振動に不規則振動論を応用して、同時に載荷する自動車の数が増えると自動車荷重が橋桁に与える動的効果は小さくなることを明らかにし、実際の設計荷重に近い状態の動的応答を計算してその特性を説明するものである。また、走行荷重による連続桁橋の動的応答についてもその特性を考察し、これまで明確にされていなかった走行荷重による連続桁橋の動力学的問題を解明する。

### 2. 運動方程式と伝達関数

自動車と橋桁との振動系を図-1のようにとる。

まず、橋桁の動たね曲線 $y$ をつぎのように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} y &= g(t) f(x) \\ f(x) &= \sum_i \frac{1}{K_i} X_i(x) \end{aligned} \right\} (1)$$

ここに、 $g(t)$ は時間のみに関する関数であり、 $X_i(x)$ は $x$ のみに関する関数で一般に基準関数とよばれ、橋桁の境界条件を満足するように定められる。 $K_i$ は橋桁の剛性 $EI$ に関するパラメータである。

いま、各振動モードに分解して運動方程式をエネルギー法をもといて導く。

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1}{g} \ddot{y}_{ix} + CA_2 \dot{y}_{ix} + EA_3 y_{ix} - \{k_T(z_T - y_v) + C_T(\dot{z}_T - \dot{y}_v)\} X_{iv} X_{ix} &= 0, \\ m_T \ddot{z}_u + k_u(z_u - z_T) + C_u(\dot{z}_u - \dot{z}_T) &= 0, \\ m_T \ddot{z}_T + k_u(z_T - z_u) + C_u(\dot{z}_T - \dot{z}_u) + k_T(z_T - y_v) + C_T(\dot{z}_T - \dot{y}_v) &= 0, \end{aligned} \right\} (2)$$

ここに、 $A_1$ 、 $A_2$  および  $A_3$  は、

$$A_1 = \int_0^l w(x) \{X_i(x)\}^2 dx, \quad A_2 = \int_0^l \{X_i(x)\}^2 dx, \quad A_3 = \int_0^l I(x) \{X_i''(x)\}^2 dx \quad (3)$$

であり、 $y_v$ は荷重接地点の動たねであり、橋面の凹凸を考慮して、 $x$  英の動たね  $y_x$  との関係は、

$$y_v = (X_{iv} / X_{ix}) y_x + z_0 \quad (4)$$

である。その他の記号は図-1を参照されたい。

式(4)を考慮しながら、 $y_x$ 、 $z_u$ 、 $z_T$  および  $z_0$  のフーリエ変換を  $Y_x$ 、 $Z_u$ 、 $Z_T$  および  $Z_0$  とし、式(2)のフーリエ変換を行う。

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{A_1}{g} (j\omega)^2 + CA_2 (j\omega) + EA_3 + (k_T \frac{X_{iv}}{X_{ix}} + C_T \frac{X_{iv}}{X_{ix}} (j\omega)) X_v X_x \right\} Y_x \\ - (k_T + C_T (j\omega)) X_v X_x Z_T + (k_T + C_T (j\omega)) X_v X_x Z_0 = 0, \\ \{m (j\omega)^2 + (k_u + C_u (j\omega))\} Z_u - (k_u + C_u (j\omega)) Z_T = 0, \\ - (k_T + C_T (j\omega)) \frac{X_{iv}}{X_{ix}} Y_x - (k_u + C_u (j\omega)) Z_u \\ + \{m_T (j\omega)^2 + (k_u + C_u (j\omega)) + (k_T + C_T (j\omega))\} Z_T - (k_T + C_T (j\omega)) Z_0 = 0. \end{aligned} \right\} (5)$$

つぎの記号をもといて、 $Y_x$  と  $Z_0$  または  $Z_u$  の間の伝達関数をもとめると、

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= (A_1/g)(j\omega)^2 + CA_2(j\omega) + EA_3 + (k_T + C_T(j\omega))X_v^2, \\ J_2 &= k_T + C_T(j\omega), \quad J_3 = k_u + C_u(j\omega), \\ J_4 &= m(j\omega)^2 + k_u + C_u(j\omega), \quad J_5 = m_T(j\omega)^2 + k_T + k_u + (C_T + C_u)(j\omega), \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{y_x z_u} &= \frac{J_2 J_3 (J_1 - J_2 X_v^2)}{J_1 (J_4 J_5 - J_3^2) - J_2^2 J_4 X_v^2}, \\ H_{y_x z_o} &= \frac{J_2 (J_2 J_4 - J_4 J_5 + J_3^2) X_v X_x}{J_1 (J_4 J_5 - J_3^2) - J_2^2 J_4 X_v^2}. \end{aligned} \right\} (7)$$

さて、入力関数として自動車のばね上質量の鉛直変位  $z_u$  または橋面の凹凸  $z_o$  をとり、応答関数として  $x$  点の動たわみ  $y_x$  をとると  $y_x$  のパワースペクトル密度  $S_{y_x}$  は、

$$\left. \begin{aligned} S_{y_x z_u}(\omega) &= \overline{H_{y_x z_u}(j\omega)} \cdot H_{y_x z_u}(j\omega) S_{z_u}(\omega), \\ S_{y_x z_o}(\omega) &= \overline{H_{y_x z_o}(j\omega)} \cdot H_{y_x z_o}(j\omega) S_{z_o}(\omega). \end{aligned} \right\} (8)$$

ここで、 $j$  は  $\sqrt{-1}$  であり、 $\overline{\quad}$  は共役複素数をあらわす。

### 3. 不規則外力に対する応答の計算

走行中の自動車の振動は主として橋面の凹凸による振動であることから入力関数として橋面の凹凸をもちいる。この凹凸のパワースペクトル密度は川合・森崎氏によって求められているのでその値とさらに単純化した値をもちいる。

$$S_{z_o}(\omega) = \frac{1}{V} (0.001 (\Omega)^{-1.792}) \quad (9)$$

#### 3-1 単純桁橋

まず、単純桁橋について計算を行う。桁は等断面とし、動たわみ曲線を

$$y = \sum (g(x)/K_i) \sin(\pi x/l) \quad (10)$$

とし、1次振動に較べて高次の振動は振動数の2乗に逆比例して小さくなるので、2次以上の項を省略する。このとき式(3)は、 $A_1 = \omega l/2$ ,  $A_2 = l/2$ ,  $A_3 = I l/2$  となり、さらに、荷重の作用点と測点をスパン中央にえらべば、 $X_v = X_x = 1$  となる。

数値計算ではスパン長、荷重の速度、橋桁の減衰係数をパラメーターにして数種の計算を行った。その代表的な結果を図-2に掲げる。

#### 3-2 連続桁橋

連続桁橋については一般に変断面桁が多くスパン割も不規則である。そこでまず、スペクトル解析に入る前に固有振動周期および振動モードを求める必要がある。われわれはこの研究では新しい試みとして Transfer Matrix 法をもといて各種桁橋の固有周期および振動モードを自動的に求める Program を開発したのでその Program をもちいて求めた。この Program は土木学会誌に掲載予定であるが、桁は単スパン、連続桁、ゲルバー桁、弾性支持桁いずれでもよく、スパン割および断面形状も自由であり、桁の端部の支持条件も単純支持、固定支持、自由端いずれの場合

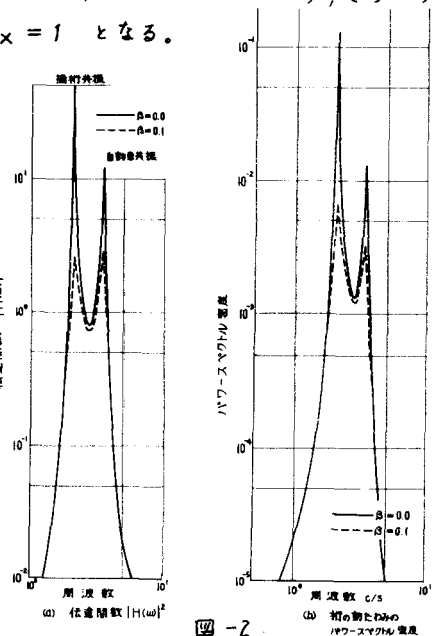


図-2

合も自動的に計算されるようになっている。

ここでは、新十三大橋を例にとってのべよう。その振動模態および振動周期とモードは図-3のとおりである。  
そこでこのモードをもちい、式(6)~(9)から各モードに対する橋桁の動的応答のパワースペクトル密度をもとめると図-4のようになる。この計算では桁の動たね外に6次までとり、各振動次数で $K_n$ が振動数の2乗に比例して大きくなることを考慮して、計算を行なっている。また振動次数に対する橋桁の減衰定数をどうするかという問題があるが、この研究ではそれぞれの次数で等しいとし、 $\beta = 0.0 \sim 0.1$ まで変化させて計算を行った。その結果の一例が図-4である。この図から3次モードを用いた場合のパワースペクトル密度がもっとも大きく、振動周期にして0.59 secでピークを示し、この値は新十三大橋の3次振動周期に相当している。既述にわたるのは新十三大橋の走行試験を行っておりその結果からこのことが認められている。また、琵琶湖大橋(東大橋梁研)および成島大橋(東大橋梁研)の走行試験の結果から連続橋の振動は高次の振動が卓越的にあらわれることが報告されている。

#### 4. 同時に多くの荷重が載荷した場合の応答と動的係数

設計活荷重のように同時に多くの荷重が載荷した場合を考えよう。この時は問題を簡単にして同種の比較的重量の大きい、等重量トラックが等間隔で運行している場合を考える。このときは自動車の振動は互に独立であるが、パワースペクトル密度は等しいとする。伝達関数 $H$ の添字を最初は応答の測点を2の文字は荷重の位置をあらわすものとして、スパン中央点の動たね $y_c$ のパワースペクトル密度を求めると、

$$\begin{aligned} S_{y_{cn}}(\omega) &= |H_{c1}|^2 S_{z_1}(\omega) + |H_{c2}|^2 S_{z_2}(\omega) + \dots + |H_{cn}|^2 S_{z_n}(\omega) \\ &= \left[ \sum_n |H_{cn}|^2 \right] S_z(\omega) \end{aligned} \quad (11)$$

また、 $H_{cn}$ はスパン中央点上の荷重の伝達関数と、

$$H_{cn} = H_{cc} \cdot \sin(\pi x_n / l) = H_{cc} \cdot \Omega_n$$

の関係があるから、式(11)は

$$S_{y_{cn}}(\omega) = \left[ \sum_n \Omega_n^2 \right] |H_{cc}|^2 S_z(\omega) = \left[ \sum_n \Omega_n^2 \right] S_{y_{cc}}(\omega) \quad (12)$$

※ 新十三大橋の振動周期とモードは設計時に計算されているのでその値と比較して図-3の値をもちいた。

Shinjuso Ohashi Bridge

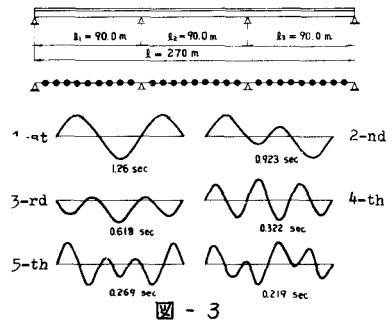


図-3

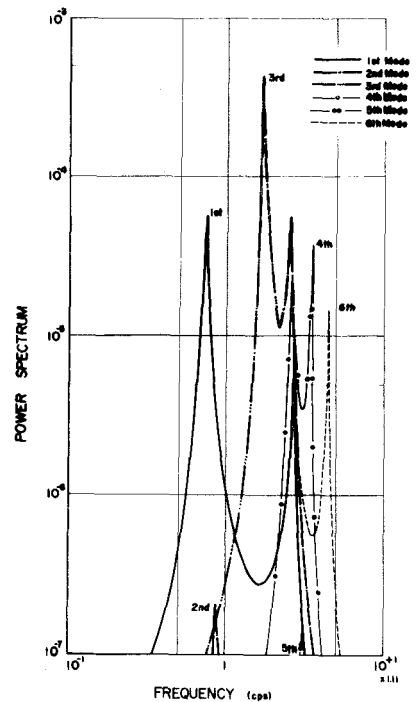


図-4

とあらわされる。

この不規則振動・標準偏差は相関関数

$R(\tau)$  のフーリエ変換を  $\omega$  とした場合に  
フーリエ変換の密度から求められる。

$$\begin{aligned} (s.v.) &= \sqrt{R(0)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_{cc}}(\omega) d\omega} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\sum \Omega_n^2] S_{y_{cc}}(\omega) d\omega} \quad (13) \end{aligned}$$

このことから動的応答の振中の少な  
くとも 68.27 % はこの振中内にあるこ  
とになる。

一方静的ため外は、この荷重がスパン  
中央に載荷したときの静たわみを  $y_{cc}$  と  
すれば 1 台の荷重に対する静たわみは、

$$y_{st} = \left[ \frac{\sum \Omega_n^2}{\sum \Omega_n^2} \right] y_{cc}$$

としてあらわされ、この場合の動的係数  
は、  $i_n = (\sum \Omega_n^2 / \sum \Omega_n^2)$

$$\begin{aligned} &\times \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_{cc}}(\omega) d\omega / y_{cc} \right) \\ &= \phi_n i_1 \quad (14) \end{aligned}$$

としてあらわされる。

## 5. スパン長と衝撃係数

設計活荷重は自動車と比較的に載荷した場合に相当するので、ここでは自動車の間隔を 10 m と  
する。このときはスパン長と載荷台数は比例するので  $\phi_n$  をスパン長の関数で示すと、図-5 の (a) 線と  
なる。一方  $i_1$  は自動車 1 台の場合の動的係数 <sup>であり</sup> 一般にスパン長が大きくなると小さくなるが実  
係は先に simulation によって求めたのでその曲線 (b) に示す。式 (14) で動的係数  $i$  は (a) と (b)  
の積であることからその直線 (c) に示す。さらに、 $10/l$  (10 m) の曲線 (d) に示すと、(d) と  
(c) の差は非常に小さいことからスパン長による減衰率として (d) の曲線をもちいてよいことが  
わかる。さて、設計衝撃係数として用いる場合の基準値であるがわれわれはこれまで計算や実験か  
ら 0.6 をとる。

以上から合理的な設計衝撃係数として、つぎの式を提案する。(図-6 参照)

$$\begin{aligned} i &= 0.6 \times 10/l & 15 \text{ m} < l \leq 150 \text{ m} \\ i &= 0.4 & l \leq 15 \text{ m} \quad (l \text{ は載荷長 m}) \end{aligned}$$

## 6. おすび

以上、不規則振動論を応用して、走行荷重による道路橋の動的応答を求め、より合理的な設計衝撃  
係数を提案することができた。また連続桁橋についても若干の考察を加えたが走行荷重による動的  
応答は高次の振動が支配的であり、衝撃係数としては単純桁の同一スパンに対するものよりさらに小  
さくなると思われる。さらにスパン長による減衰率も求めたのでこの減衰率をもちいて、1 台の走  
行試験からスパン長に対する設計走行衝撃係数を推定することができる。

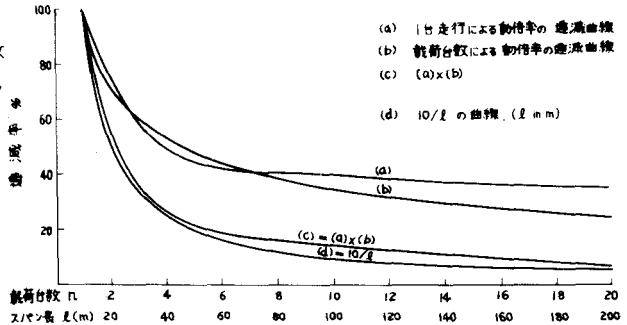


図-5

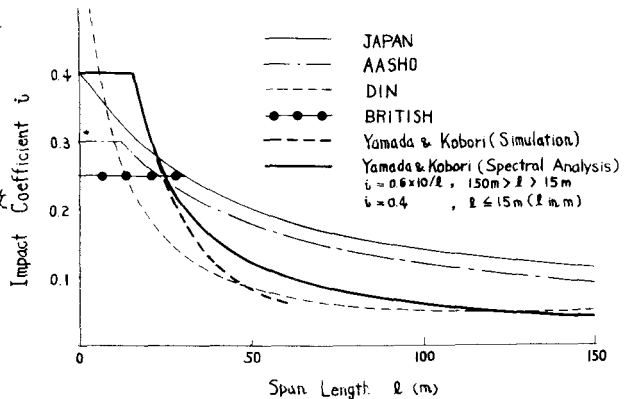


図-6