

東京都立大学教授

正員 工博 奥田秋夫

東京都立大学大学院(修士) 学生員

○ 国井隆弘

§ 1 よえき

構造物の動的な解析を行うためには、その構造物の持つ固有振動数と振動モードの二つが常に必要となる。当研究では三径間連続梁(質量と剛度が等分布している)について固有振動数と振動モードを求めた。また簡単な模型を作り計算値と比較を行い更に連続梁の振動を単純梁と比較した。計算された厳密解は大型電子計算機(HITAC 5020)を主として利用し、三連モーメント式を応用した振動数方程式を解くことにより求められている。この際両側径間を等しくして中央径間の側径間に対する比(γ)を $\gamma=1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0$ の5種について計算及び実験を行った。また2.3の近似解を用いて数値計算を行い厳密解と比較した。

§ 2 計算式及び計算方法

図-1でS-スパンの振動方程式は m を単位長さ当りの質量、 EI を

曲げ剛度として、
$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式(1)は変数を分離して $k_n^4 = m p_n^2 / EI$ とおけば(2)式の解を得る

$$X_{ns} = A_{ns} \sin k_n x + B_{ns} \cos k_n x + C_{ns} \sinh k_n x + D_{ns} \cosh k_n x \quad (2)$$

式(2)に境界条件を代入して $EI X_{ns}(l_s) = -M_{ns}$ を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} M_{n(s-1)} H_{ns} - M_{ns} (G_{ns} + G_{n(s+1)}) + M_{n(s+1)} H_{n(s+1)} &= 0 \\ \text{ここで } \begin{cases} G_{ns} = \coth k_n l_s - \cot k_n l_s \\ H_{ns} = \operatorname{cosech} k_n l_s - \operatorname{cosec} k_n l_s \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)が振動数方程式である。 n は振動次数を示す。式(3)を各スパンに適用した M についての連立方程式が $M=0$ 以外の解を持つための条件から固有値(k_n)が決定される。即ち

$$\Delta = \begin{vmatrix} (G_{n1} + G_{n2}) & H_{n2} \\ H_{n2} & (G_{n2} + G_{n3}) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ここで } \begin{cases} G_{n1} = G_{n3} = \coth k_n l - \cot k_n l \\ G_{n2} = \operatorname{cosech} k_n (r_l) - \operatorname{cosec} k_n (r_l) \end{cases} \quad (4)$$

数値計算に用いられた各 γ 及び l 値は表-1に示されている。求められた振動数及び振動モードはそれぞれ表-2及び図-2に示してある。ここで EI と m は模型の値を用いてある。 $(\sqrt{EI/m} = 1.05622 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{sec})$

§ 3 近似解法

(A) 梁を質点に置き換える方法

図-3の如く梁を有限個の質点(ここでは6個)と見なして

質点の加速度による力と復元力との平衡条件から

次頁の振動数方程式を得る。

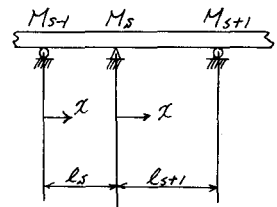


図-1

表-1	
γ	l
1.0	2.000 m
1.25	1.846
1.5	1.714
1.75	1.600
2.0	1.500

表-2 振動数(厳密解)					
n	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
1	41.5	39.4	35.5	31.4	28.8
2	53.2	60.2	66.8	71.8	73.7
3	77.6	74.1	78.3		93.3
4	166	151	131	119	115
5	189	218	226	214	195

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} - \frac{1}{m_1 p^2}) & \delta_{12} & \cdots & \delta_{16} \\ \delta_{21} & (\delta_{22} - \frac{1}{m_2 p^2}) & \cdots & \delta_{26} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{61} & \delta_{62} & \cdots & (\delta_{66} - \frac{1}{m_6 p^2}) \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

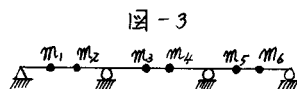


図-3

ここで δ_{ij} は j 点に作用した単位荷重による i 点のたわみである。式(5)を解く際には対称と逆対称に別けて考えれば計算は簡易化される。 $\gamma = 1.0$ に対する計算結果が表-3に示されている。

(b) エネルギー式の応用 (Ritz)

振動たわみ式を各スパンごとに(6)式の如く仮定して境界条件を対称と逆対称解とに別けて代入し、Ritzの方法を適用すると式(7)になる。式(7)が各係数に對する振動数方程式となる。

$$X_5 = a_{15}X + a_{25}X^2 + a_{35}X^3 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{ns}} \left\{ EI(X'')^2 - p^2 m X^2 \right\} dX = 0 \quad (7)$$

以上の近似解法による数値計算の結果を表-3に示す。

ここで()内の数字は厳密解に対する比を示す。

§4 模型実験

用いられた模型は全長 6.0^m 断面 $10^m \times 5^m \times 3.2^m$ の box 断面を持った軽量形鋼である。梁の振動は手によって衝撃を手える方法を用い、高次振動が減衰した後、基本振動波を解析して振動数と振動モードを得た。測定された振動数は表-4に示してある。振動数、モード共理論値と相当近似している。

γ	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
box内に 水なし	44.1 (0.990)	39.0 (0.995)	35.0 (0.997)	31.7 (1.011)	28.4 (0.986)
水あり	33.0 (0.998)	31.8 (1.011)	28.0 (0.991)	24.7 (0.977)	23.0 (1.002)

表-3 振動数(近似解法) $\gamma = 1.0$

n	(a) 法	(b) 法
1	48.7 (1.17)	46.02 (1.11)
2	61.9 (1.16)	
3	87.7 (1.13)	121.8 (1.57)
4	278 (1.85)	
5	307 (1.05)	

§5 むすび

三径間連続梁の固有振動数は表-2の如く高次振動数が基本振動数に比較的近い(単純梁では n 次の振動数は1次の n^2 倍である)。それ故高次振動の影響が簡単には無視できないと考えられる。このことは実験データ(図-3)からも明らかであるが、自由振動状態では高次な程減衰が大きい様である。

図-3はスパン長 6.0^m の単純梁と連続梁($\gamma = 1.0$)の測定された波形的の一部だが初期時の連続梁の波形をフーリエ解析した結果1次の $\frac{3}{5}$ の周期の波(3次に近い)が約0.6の比で含まれていた。(衝撃測定は中間スパン中央点) 当研究の近似解法の高次値は誤差が大きいので $EI, m, \text{const.}$ の場合厳密解より有利である近似解を更に研究してきたい。

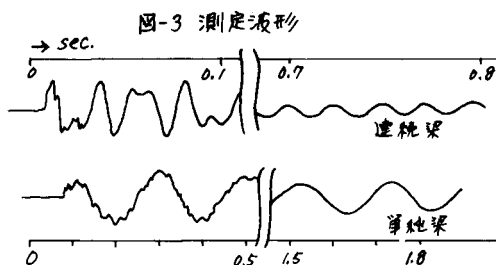


図-3 測定波形