I －136　吊橋の風圧による横座屈について

中央大学 理工学部　正員　○ 岡内 功
同　　　　　　　　　正員　　　根本紘一

1. まえがき

吊橋の風圧による横座屈現象は平井[1]によって始めて指摘された現象であるが、その後、風洞実験その他によって発現の可能性が実験的にも確認されていることは既にしばしば報告したとおりである。[2]
したがって、本州四国連絡橋耐風設計指針でもこの現象について十分注意するよう方針が与えられたのであるが、最近、多径間吊橋や連続吊橋などについての論議が盛となり、これら吊橋の耐風性を判断するためには平井が与えたところの逆対称座屈形を前提とした限界風速計算式を多少再検討する必要が生じて来た。

ところで、吊橋の横座屈現象についてはVlasov やBolotinら[3]もその著書において横座屈の典型例として取り上げるに至っているが、こゝで彼らはGalerkin の方法を適用して問題を解明している。境界条件や荷重条件が複雑な場合には基礎微分方程式を直接解くのがはなはだ困難となるから、こうした方法は便利な方法として考えられるものである。そこで、今回、Galerkin の方法を適用して[4]吊橋の風圧による横座屈現象の限界風速を一般的に求める方法を定め、対称座屈形を生ずる場合や、ケーブルへの風荷重移行の影響を考慮した場合など従来ほとんど取り扱われていなかった場合における限界風速計算式を求めて見た。さらに実際の吊橋設計例に関してこれらの式による数値的検討を併せ実施した。以上の考察結果の妥当性については実験的検討がなされていないので、多少問題点が残るとも考えられるのであるが、とりあえず現在までに得られた結果を報告することにする。

2. Galerkin の方法の適用

風圧を受けて吊橋が横座屈状態に移った時の釣り合い方程式は、線形化された撓度理論により一般的に示せば次のとおりである。

$$\left.\begin{aligned} &EI\frac{d^4\eta}{dx^4}-H_w\frac{d^2\eta}{dx^2}-h_1\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2}{dx^2}(\mathfrak{M}\varphi)-(\delta+C_d)pb\varphi=0\\ &\mathfrak{M}\frac{d^2\eta}{dx^2}+EC_w\frac{d^4\varphi}{dx^4}-\left(GK+\frac{H_wb^2}{4}\right)\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{b}{2}h_2\frac{d^2y}{dx^2}-\delta_t pb^2\varphi=0 \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

こゝで、η および φ は鉛直曲げたわみおよびねじれ角を表わし、EI, GK, EC_w はそれぞれ、吊構造部の鉛直曲げ、ねじれ、および曲げねじれ剛性を表わす。さらに H_w はケーブルの死荷重による水平張力を表わし、一方 $\mathfrak{M}$ は抗力が吊構造部に及ぼす水平面内の曲げモーメントである。また、C_d は抗力係数、δ および δ_t は揚力係数および空力モーメント係数曲線の勾配を示す。次に、h_1 および h_2 は吊構造部の座屈変位にもとづくケーブルの水平張力の増分であって、それぞれ次式によって与えられる。

$$h_1=-\frac{E_cA_c}{L_c}y''\int_L\eta\,dx\quad,\qquad h_2=-\frac{E_cA_c}{L_c}\frac{b}{2}y''\int_L\varphi\,dx\qquad(2)$$

こゝに、E_cA_c はケーブルの伸び剛性であり、右辺の積分は吊橋全長にわたって行われる。なお、以上において、EI などの諸剛性、H_w などのケーブル張力はすべて吊橋全体に対する値である。

いま、吊橋の中央径間（$x=0\sim l$）に着目して(1)式の近似解を、境界条件を満足する関数 u, v によって、$\eta\approx u(x)$, $\varphi\approx v(x)$ とおくならば、Galerkin の方法から次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^l\left[EIu^{IV}-H_w u''-h_1 y''+(\mathcal{M}v)''-(\delta+C_d)pbv\right]u\,dx=0\\&\int_0^l\left[\mathcal{M}u''+EC_w v^{IV}-\left(GK+\frac{H_w b^2}{4}\right)v''-\frac{b}{2}h_2 y''-\delta_\alpha pb^2 v\right]v\,dx=0\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

この(3)式から u および v に含まれる未定係数に関する線形同次の連立方程式が得られ、その係数行列式が0でなければならない条件から座屈風荷重 p_K ひいては座屈風速 V_K を決定する方程式が求められる。

3. 逆対称座屈形の場合

先づ、座屈形が逆対称形の場合を取り扱かうこととすれば、この場合、(1)式において $h_1=h_2=0$ とおくことが出来、したがって簡単に解が求められる。そして補剛桁が単純支持されている時には、他径間の影響はなくなるから、径間が多数あっても単径間として考えても差し支えない。いま、$\lambda=\pi/l$ とおき、

$$u=A\sin 2\lambda x\quad,\qquad v=B\sin 2\lambda x\qquad(4)\qquad とする。$$

(4)式を(3)式に代入して積分を実行すれば、

$$\left.\begin{aligned}&\left[(2\lambda)^4EI+(2\lambda)^2H_w\right]A-\left[\frac{1}{4}C_d pb\left\{\frac{(2\lambda)^2l^2}{3}+1\right\}+(\delta+C_d)pb\right]B=0\\&-\left[\frac{1}{4}C_d pb\left\{\frac{(2\lambda)^2l^2}{3}+1\right\}\right]A+\left[(2\lambda)^4EC_w+\left(GK+\frac{H_w b^2}{4}\right)(2\lambda)^2-\delta_\alpha pb^2\right]B=0\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

ただし、$\mathcal{M}=\frac{C_d pb}{2}x(l-x)$ としている。ここで平井式にならって、

$$EJ=EI+\frac{H_w}{(2\lambda)^2}\quad,\qquad \overline{GK}=(2\lambda)^2EC_w+GK+\frac{H_w b^2}{4},\qquad \kappa=\frac{1}{4}\left[\frac{(2\lambda)^2l^2}{3}+1\right]\qquad(6)$$

とおくと、(5)式は次のように簡単に表示される。

$$\left.\begin{aligned}&(2\lambda)^4EJ\cdot A-\left[\kappa C_d+(\delta+C_d)\right]pb\cdot B=0\\&-\kappa C_d pb\cdot A+\left[(2\lambda)^2\overline{GK}-\delta_\alpha pb^2\right]B=0\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

(7)式において、A, B が0以外の解をもつためには係数行列式が0でなければならないから、

$$\begin{vmatrix}(2\lambda)^4EJ & -\left[\kappa C_d+(\delta+C_d)\right]pb\\ -\kappa C_d pb & (2\lambda)^2\overline{GK}-\delta_\alpha pb^2\end{vmatrix}=0\qquad(8)$$

(8)式を展開すれば

$$\left[\kappa^2C_d^2+(\delta+C_d)\kappa C_d\right]p_K^2b^2+\left[(2\lambda)^4\delta_\alpha b^2EJ\right]p_K-(2\lambda)^6EJ\cdot\overline{GK}=0\qquad(9)$$

いま、座屈風速がかなり大きいものとすれば(9)式の左辺第2項の影響は小さくなるので、これを省略すると、限界風速 V_K は、$p_K=\frac{\rho V_K^2}{2}$ であるから

$$V_K^2\fallingdotseq\frac{2(2\lambda)^3\sqrt{EJ\cdot\overline{GK}}}{\rho b\sqrt{\kappa C_d\left[\kappa C_d+(\delta+C_d)\right]}}\qquad(10)$$

として求められる。

4. 対称座屈形の場合

対称形に座屈する場合には、座屈形すなわち(1)式の解を(4)式のように1箇の正弦項だけで近似したのでは良い結果が得られない。また、ケーブル張力に変化が生じ、他径間にも中央径間の座屈変形の影響が及ぶことを考慮しなければならない。そこで次のように座屈形を近似することとする。なお、各径間とも補剛げたは単純支持されているとしている。

中央径間に対して　$u=A(\sin\lambda x+\bar{a}\sin 3\lambda x)$　,　$v=B(\sin\lambda x+\bar{b}\sin 3\lambda x)$

他径間に対して　$u_1=A(\bar{a}_1\sin\lambda_1 x_1)$　,　$v_1=B(\bar{b}_1\sin\lambda_1 x_1)$　　(11)

ここで、$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a}_1$ および $\bar{b}_1$ は座屈形が対称一次基本振動形と一致するとして定める。

(11)式のように変形を考えると、ケーブル張力の増分 h_1 および h_2 は側径間の等しい3径間吊橋の場合、

$$h_1=\frac{E_cA_c}{L_c}\frac{8f}{l^2}\frac{2}{\lambda}A\left(1+\frac{\bar{a}}{3}+2\alpha\beta\bar{a}_1\right),\qquad h_2=\frac{E_cA_c}{L_c}\frac{8fb}{l^2}\frac{1}{2\lambda}B\left(1+\frac{\bar{b}}{3}+2\alpha\beta\bar{b}_1\right)\qquad(12)$$

となるが、ここに $\alpha={l_1}/{l}$ であり、$\beta={w_1}/{w}$ である。

後は逆対称座屈形の場合と同様に計算を進めれば良いが、(11)および(12)式を(3)式に代入すれば、(8)式に対応する係数行列式は次のように計算される。

$$\begin{vmatrix} EI\lambda^4(1+81\bar{a}^2)+H_w\lambda^2(1+9\bar{a}^2) & -\frac{C_d\rho b}{4}\left[\frac{\lambda^2l^2}{3}(1+9\bar{a}\bar{b})+(1+\bar{a}\bar{b})-\frac{3}{4}(\bar{b}+9\bar{a})\right] \\ +\left(\frac{8f}{l^2}\right)^2\frac{E_cA_c}{L_c}\frac{8}{\lambda^2 l}\left(1+\frac{\bar{a}}{3}+2\alpha\beta\bar{a}_1\right)\left(1+\frac{\bar{a}}{3}\right) & -(\delta+C_d)(1+\bar{a}\bar{b})\rho b \\ -\frac{C_d\rho b}{4}\left[\frac{\lambda^2l^2}{3}(1+9\bar{a}\bar{b})+(1+\bar{a}\bar{b})-\frac{3}{4}(\bar{b}+9\bar{a})\right] & EC_w\lambda^4(1+81\bar{b}^2)+\left(GK+\frac{H_wb^2}{4}\right)(1+9\bar{b}^2)\lambda^2-\delta_*\rho b^2(1+\bar{b}^2) \\ & +\left(\frac{8fb}{l^2}\right)^2\frac{E_cA_c}{L_c}\frac{2}{\lambda^2 l}\left(1+\frac{\bar{b}}{3}+2\alpha\beta\bar{b}_1\right)\left(1+\frac{\bar{b}}{3}\right)\end{vmatrix}=0\qquad(13)$$

ここで(10)式と同じ形で今の場合の限界風速を表現するために次のようにおく。

$$\left.\begin{aligned}(EJ)_s&=\left[EI(1+81\bar{a}^2)+\frac{H_w}{\lambda^2}(1+9\bar{a}^2)\right]+\left(\frac{8f}{l^2}\right)^2\frac{E_cA_c}{L_c}\frac{8}{\lambda^2 l}\left(1+\frac{\bar{a}}{3}+2\alpha\beta\bar{a}_1\right)\left(1+\frac{\bar{a}}{3}\right)\\(\overline{GK})_s&=\left[EC_w\lambda^2(1+81\bar{b}^2)+\left(GK+\frac{H_wb^2}{4}\right)(1+9\bar{b}^2)\right]+\left(\frac{8fb}{l^2}\right)^2\frac{E_cA_c}{L_c}\frac{2}{\lambda^2 l}\left(1+\frac{\bar{b}}{3}+2\alpha\beta\bar{b}_1\right)\left(1+\frac{\bar{b}}{3}\right)\\(\kappa)_s&=\frac{1}{4}\left[\frac{\lambda^2l^2}{3}(1+9\bar{a}\bar{b})+(1+\bar{a}\bar{b})-\frac{3}{4}(\bar{b}+9\bar{a})\right]\\(\delta+C_d)_s&=(\delta+C_d)(1+\bar{a}\bar{b})\quad,\quad(\delta_*)_s=\delta_*(1+\bar{b}^2)\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

(14)式を用いれば(13)式は

$$\begin{vmatrix}\lambda^4(EJ)_s & -\left[(\kappa)_sC_d+(\delta+C_d)_s\right]\rho b\\ -(\kappa)_sC_d\rho b & \lambda^2(\overline{GK})_s-(\delta_*)_s\rho b^2\end{vmatrix}=0\qquad(15)$$

となり、(8)式と全く同様である。したがって、対称座屈形の場合の座屈風速 $(V_k)_s$ は、

$$(V_k)_s^2\doteqdot\frac{2\lambda^3\sqrt{(EJ)_s(\overline{GK})_s}}{\rho b\sqrt{(\kappa)_sC_d\left[(\kappa)_sC_d+(\delta+C_d)_s\right]}}\qquad(16)$$

として求められる。

5. ケーブルへの風荷重移行を考慮した場合

補剛げたが抗力によって横にたわむ際、吊材が傾斜しこの吊材を通じて補剛げたに働らく抗力の一部がケーブルに移行して、補剛げたの受ける曲げモーメントが軽減されることは良く知られている事実である。前節までの計算ではこの点を考慮に入れていなかったので、ここで風圧による曲げモーメントを示す $\mathfrak{M}$ を上述の観点にもとづいて修正することにする。

ところで、吊橋の風圧による横たわみ現象については Moiseiff らの弾性分配理論が現在多く利用されており、風洞実験の結果によってもこの理論の信頼性は十分高いと認められている。しかし、ここで与えられた基本式を今の場合にそのまま適用しても計算が厄介である。これに対して、伊藤は[5] Fourier 級数を用いて問題を取り扱った解を示しているが、この方法は一様分布荷重の場合、Moiseiff らの弾性分配理論による結果に良く一致した結果を与える。そこで、その解を用いることとするが、伊藤によれば、補剛げたの横たわみ ξ および ξ_c を

$$\xi = (C_1 \sin\lambda x + C_3 \sin 3\lambda x)\frac{4}{\pi}\frac{h_T}{w_s}C_d p b\ , \quad \xi_c = (D_1 \sin\lambda x + D_3 \sin 3\lambda x)\frac{4}{\pi}\frac{h_T}{w_s}C_d p b$$

とした時、C_1, C_3, D_1 および D_3 は次の連立方程式を解くことによって決定される。

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{\pi^4}{8}\frac{\lambda_1}{\nu_h^2}(1+\bar\beta) & \frac{243\pi^2}{16}\frac{1}{\nu_h^2}(1+\bar\beta) & -1 & 0 \\ \frac{3}{16}\frac{\pi^2}{\nu_h^2}(1+\bar\beta) & 1+\frac{81}{8}\pi^4\frac{\lambda_3}{\nu_h^2}(1+\bar\beta) & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1+\frac{\pi^2}{8}\lambda_1(1+\bar\beta) & \frac{27}{16}(1+\bar\beta) \\ 0 & -1 & \frac{3}{16}(1+\bar\beta) & 1+\frac{9\pi^2}{8}\lambda_3(1+\bar\beta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ D_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{8}{\pi^2}\frac{f}{h_T} \\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{8}{9\pi^2}\frac{f}{h_T}\right) \\ \bar C\left(1-\frac{8}{\pi^2}\frac{f}{h_T}\right) \\ \frac{\bar C}{3}\left(1-\frac{8}{9\pi^2}\frac{f}{h_T}\right) \end{bmatrix} \qquad (17)$$

ここで、$\lambda_1=(h_c+0.131f)/f$, $\lambda_3=(h_c+0.333f)/f$, $\bar\beta = w_c/w_s$, $\nu_h = l\sqrt{H_w/EI_l}$, $\bar C = \bar C_d d_c/C_d b$ であり、EI_l は補剛げたの横方向曲げ剛性である。また、$\bar C_d$ および d_c はケーブルの抗力係数および直径であり、h_T および h_c は塔の高さおよび中央点の吊材長を表わす。

(17)式によって C_1 および C_3 が求まれば、

$$\mathfrak{M} = -EI_l\xi'' = EI_l\lambda^2(C_1\sin\lambda x + 9C_3\sin 3\lambda x)\frac{4}{\pi}\frac{h_T}{w_s}C_d p b \qquad (18)$$

より $\mathfrak{M}$ が計算される。この $\mathfrak{M}$ を $\frac{C_d p b}{2}x(l-x)$ の代りに(3)式に代入するならば、ケーブルへの風荷重移行を考慮した時の限界風速が得られるわけであるが、結果的には(6)または(14)式における κ または $(\kappa)_s$ の項が修正されるだけである。その修正された項を $\bar\kappa$ および $(\bar\kappa)_s$ とすれば、それぞれ次のようである。

$$\left.\begin{aligned} \bar\kappa &= \frac{1}{\nu_h^2}\frac{h_T}{f}2(1+\bar\beta)(2\lambda)^2 l^2\left(\frac{8}{15}C_1 + \frac{24}{7}C_3\right) \\ (\bar\kappa)_s &= \frac{1}{\nu_h^2}\frac{h_T}{f}4(1+\bar\beta)\lambda^2 l^2\left[\frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{15}(C_1\bar b + 9C_1\bar a + 9C_3) + \frac{81}{35}(9C_3\bar a + C_3\bar b + C_1\bar a\bar b) + 9C_3\bar a\bar b\right] \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

こうして $\bar\kappa$ および $(\bar\kappa)_s$ が求められれば、風荷重移行の影響を考慮した時に求められる座屈風速 $\bar V_K$ および $(\bar V_K)_s$ は、考慮しない時に求められた値 V_K および $(V_K)_s$ に次の増大係数 M および $(M)_s$ を乗ずれば良いこととなる。

$$M^2 = \frac{\bar V_K^2}{V_K^2} = \sqrt{\frac{\kappa\,[C_d\kappa + (\delta + C_d)]}{\bar\kappa\,[C_d\bar\kappa + (\delta + C_d)]}} \qquad (M)_s^2 = \frac{(\bar V_K)_s^2}{(V_K)_s^2} = \sqrt{\frac{(\kappa)_s[C_d(\kappa)_s + (\delta + C_d)_s]}{(\bar\kappa)_s[C_d(\bar\kappa)_s + (\delta + C_d)_s]}} \qquad (20)$$

6、数値計算例

以上の各式によって次の諸元をもつ吊橋の限界風速の計算を試みたが、紙数の関係で結果のみを示す。

$l = 1{,}500\,\mathrm{m}$, $f = 150\,\mathrm{m}$, $b = 33\,\mathrm{m}$, $w = 31.0\,\mathrm{t/m}$, $EI = 1.43\times10^8\,\mathrm{t\text{-}m^2}$, $EI_l = 10.81\times10^8\,\mathrm{t\text{-}m^2}$

$GK = 5.69\times10^7\,\mathrm{t\text{-}m^2}$, $EC_w = 2.0\times10^{10}\,\mathrm{t\text{-}m^4}$, $E_cA_c = 18.06\times10^6\,\mathrm{t}$, $\delta = 1.5$, $C_d = 0.30$

計算記号	座屈形	径間数	l_1 (m)	L_c (m)	$\bar a$	$\bar b$	$\bar a_1$	$\bar b_1$	V_K または $(V_K)_s$ (m/s)	M または $(M)_s$	$\bar V_K$ または $(\bar V_K)_s$ (m/s)
I	逆対称	—	—	—	—	—	—	—	101	1.81	183
II	対称	3径間	750	3,150	-0.0627	-0.7975	-0.0434	-0.4399	103	2.31	238
III	対称	3径間	1,250	5,220	-0.0063	-0.5747	-0.0063	-0.5088	79	2.04	161

1) 平井 敦；吊橋のねじり振動に対する安定性について，土木学会誌，Vol.28，1942.

2) 平井，岡内ほか；全径間吊橋模型による風洞実験について，第16，17，19回土木学会講演会概要，1961~64.

3) V. Z. Vlasov；Thin-Walled Elastic Beams，1961 あるいは V. V. Bolotin；The Dynamic Stability of Elastic System，1964

4) 竹間、岡内は先に"吊橋の風圧による横座屈"第11回橋梁構造工学研究発表会講演概要，1964. において Ritz の方法を適用した式を与えたが、ここにおける空気力のポテンシャル表示が適切でなかったのでこれを全面的に訂正する。

5) M. Ito；The Lateral Motion of Suspension Bridges，土木学会論文集，第81号，1962.