I −129　　吊橋の静力学的解析について

早稲田大学理工学部　正員　堀井健一郎
○ 早稲田大学 大学院　学生員　川原睦人
早稲田大学 大学院　学生員　木崎太郎

I．はじめに

吊橋の解法として吊材が数多く存在することを前提とした理論が，従来多く発表されてきた。これらは何れも吊材数が非常に多いという吊橋の特性を何等かの形で利用したものと解釈されるが，近頃その解析に当り吊橋各部材に着目した解法が検討されるようになってきた。本論文では，この立場に基づき以下の様に基本式を誘導したが，11式に示した解式の計算過程の違いにより数種の解法が考えられるので，それらを総括的に取り扱ってみた。

II．解式の誘導

1．つりあい条件式

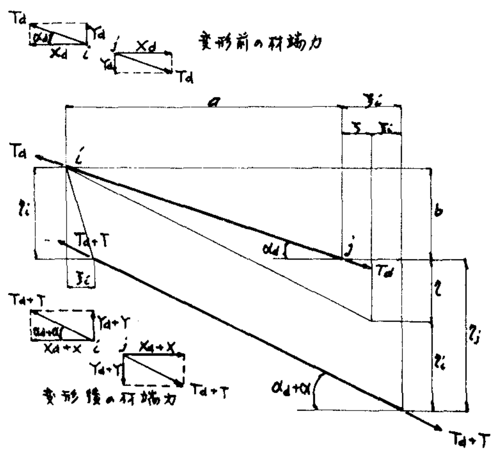
吊橋に死荷重のみが載荷されている基本状態での釣合をFig. 1の記号に従い，suffix d をつけて示すと

$$T_d\cos\alpha_d = X_d \qquad T_d\sin\alpha_d = Y_d \qquad \text{------ 1.}$$

吊橋に活荷重が載荷された後では

$$(T_d+T)\cos(\alpha_d+\alpha) = X_d+X \qquad (T_d+T)\sin(\alpha_d+\alpha) = Y_d+Y \qquad \text{---- 2.}$$

ここで方向余弦を部材の相対変位 ξ，η であらわしTaylor展開することにより



$\ell_d=\sqrt{a^2+b^2}$

Fig 1

$$\cos(\alpha_d+\alpha) = \frac{(a+\xi)}{\sqrt{(a+\xi)^2+(b+\eta)^2}} \fallingdotseq \frac{a}{\ell_d} + \frac{a\cdot b^2}{\ell_d^3}\left(\frac{\xi}{a}-\frac{\eta}{b}\right)$$

$$\sin(\alpha_d+\alpha) = \frac{(b+\eta)}{\sqrt{(a+\xi)^2+(b+\eta)^2}} \fallingdotseq \frac{b}{\ell_d} + \frac{a^2 b}{\ell_d^3}\left(\frac{\eta}{b}-\frac{\xi}{a}\right) \qquad \text{------- 3.}$$

2式及び3式から1式の関係を用いて X_d，Y_d を消去すると，活荷重による部材軸力の鉛直方向，水平方向の増分 Y，X は次の如く求められる。

$$X = (T_d+T)\frac{a\cdot b^2}{\ell_d^3}\left(\frac{\xi}{a}-\frac{\eta}{b}\right)+T\frac{a}{\ell_d} \ ,\ Y = (T_d+T)\frac{a^2 b}{\ell_d^3}\left(\frac{\eta}{b}-\frac{\xi}{a}\right)+T\frac{b}{\ell_d} \qquad \text{--------- 4.}$$

2．変形条件式

部材力 T と，部材の相対変位との間には次の関係がある。

$$\frac{\ell_d}{EA}T = \frac{a}{\ell_d}\xi + \frac{b}{\ell_d}\eta \qquad \text{------ 5.}$$

3．形状行列［K］

ケーブル，吊材の順に節点及び部材に番号をつけ，節点の番号が行に，部材の番号が列に対応する行列を考え第 k 部材の一端が i 節点に，他端が j 節点に結合されている場合，その行列の i k 要素

を1，j点要素を-1とする。この形状行列〔K〕の小行列のうちケーブル部材同志，ケーブル節点と吊材とが補剛桁節点と吊材との結合状態を示す部分をそれぞれα，β，γとする。又γの各行の和を作り，これをγ'とし，γ'を含む形状行列を〔K'〕とあらわす。

$$[K]=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{bmatrix} \qquad [K']=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma'\end{bmatrix} \qquad \text{------6.}$$

4．適合条件式

5式を吊橋全体について立てると次の如くなる。ただし転置行列には$^{-}$を付けて表わす。

$$[G]\{T\}=[C_{xd}\cdot\bar{K}']\{\xi\}+[C_{yd}\cdot\bar{K}]\{\eta\} \qquad \text{------7.}$$

$\{T\}$,$\{\xi\}$,$\{\eta\}$は，それぞれ部材軸力，水平変位，鉛直変位をそれぞれ番号順に並べたベクトルであり$[G]$,$[C_{xd}]$,$[C_{yd}]$はそれぞれ各部材について$\frac{l_d}{EA}$，$\frac{a}{l_d}$，$\frac{b}{l_d}$を番号順に並べた対角行列である。

5．補剛桁に関する条件式

補剛桁の各節点における曲げモーメントを番号順に並べたベクトルを$\{M_s\}$とし，補剛桁各節点間に三連モーメントの定理を適用すれば8式の様に行列表示される。ただし補剛桁の軸力による変形は無視して補剛桁水平移動量をξ_sとする。

$$[F_s]\{M_s\}+[\bar{Z}_s]\{\eta_s\}=\{0\} \qquad \text{------8.}$$

$$[F_s]=\begin{bmatrix}2\left(\frac{l_{d1}}{6EI_1}+\frac{l_{d2}}{6EI_2}\right) & \frac{l_{d2}}{6EI_2} & & \\ \frac{l_{d2}}{6EI_2} & 2\left(\frac{l_{d2}}{6EI_2}+\frac{l_{d3}}{6EI_3}\right) & \frac{l_{d3}}{6EI_3} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \frac{l_{dn-1}}{6EI_{n-1}} & 2\left(\frac{l_{dn-1}}{6EI_{n-1}}+\frac{l_{dn}}{6EI_n}\right)\end{bmatrix} \qquad [\bar{Z}_s]=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{l_{d1}}+\frac{1}{l_{d2}}\right) & -\frac{1}{l_{d2}} & & \\ -\frac{1}{l_{d2}} & \left(\frac{1}{l_{d2}}+\frac{1}{l_{d3}}\right) & -\frac{1}{l_{d3}} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -\frac{1}{l_{dn-1}} & \left(\frac{1}{l_{dn-1}}+\frac{1}{l_{dn}}\right)\end{bmatrix}$$

6．節点におけるつりあい条件式

4式を全部材について立て行列により表わすと

$$\begin{aligned}\{X\}&=[C_{xd}]\{T\}+[P][\bar{K}']\{\xi\}+[Q][\bar{K}]\{\eta\}\\ \{Y\}&=[C_{yd}]\{T\}+[Q][\bar{K}']\{\xi\}+[R][\bar{K}]\{\eta\}\end{aligned} \qquad \text{------9.}$$

ここに$[P]$,$[Q]$,$[R]$は，全部材について，それぞれ$P=(T_d+T)\frac{b^2}{l_d^3}$，$Q=-(T_d+T)\frac{ab}{l_d^3}$，$R=(T_d+T)\frac{a^2}{l_d^3}$を作り，番号の順に並べた対角行列である。

各節点におけるつりあい条件は，次式によって示される。

$$\begin{aligned}&[K']\{X\}=\{H\}\\ &[K]\{Y\}+\begin{bmatrix}0\\ Z_s\end{bmatrix}\{M_s\}=\{V\}\end{aligned} \qquad \text{------10.}$$

$\{H\}$,$\{V\}$はそれぞれ外力荷重の水平，鉛直成分を表わすベクトルである。

7．吊橋の解式

9式を10式に代入整頓して，7式，8式と共に行列表示すれば吊橋の解式を得る。それ等に支点条件を導入しケーブル・吊材・補剛桁に分け，それぞれsuffix C，H，S を付すと次の如くなる。

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}\begin{bmatrix}-G_c & \\ & -G_H\end{bmatrix} & & & \begin{bmatrix}C_{xdc} & \\ & C_{xdH}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & 0\\ \bar{\beta} & \bar{\gamma}'\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}C_{ydc} & \\ & C_{ydH}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & 0\\ \bar{\beta} & \bar{\gamma}\end{bmatrix}\\ & & [F_s] & & \begin{bmatrix}0 & \bar{Z}_s\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{xdc} & \\ & C_{xdH}\end{bmatrix} & & & \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_c & \\ & P_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & 0\\ \bar{\beta} & \bar{\gamma}'\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_c & \\ & Q_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & 0\\ \bar{\beta} & \bar{\gamma}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{ydc} & \\ & C_{ydH}\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}0\\ Z_s\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_c & \\ & Q_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & 0\\ \bar{\beta} & \bar{\gamma}'\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_c & \\ & R_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & 0\\ \bar{\beta} & \bar{\gamma}\end{bmatrix}\end{array}\right]\begin{Bmatrix}T_c\\ T_H\\ M_s\\ \hline \xi_c\\ \xi_s\\ \eta_c\\ \eta_s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \hline H_c\\ V_c\\ H_s\\ V_s\end{Bmatrix} \qquad \text{------11.}$$

Ⅲ、解法

1，変形量を未知数とした場合の解法

11式の前半より，T_c，T_H，M_sを求め，後半に代入して整頓すると

$$\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}\alpha\beta & \\ & \alpha\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_c & & B_c & \\ & A_H & & B_H \\ B_c & & C_c & \\ & B_H & & C_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar\alpha & \\ \bar\beta & \\ & \bar\alpha \\ & \bar\beta\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\beta & \\ & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_H & B_H\\ B_H & C_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar\gamma' & \\ & \bar\gamma\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}\gamma' & \\ & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_H & B_H\\ B_H & C_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar\beta & \\ & \bar\beta\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\gamma' & \\ & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_H & B_H\\ B_H & C_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar\gamma' & \\ & \bar\gamma\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \\ & D_s\end{bmatrix}
\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\xi_c\\ \eta_c\\ \hline \xi_s\\ \eta_s\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}H_c\\ \bar V_c\\ \hline H_s\\ \bar V_s\end{array}\right\} \qquad \text{-------- 12.}$$

ここに外力荷重は，補剛桁にのみ作用しているものとして$H_c = \bar V_c = H_s = [0]$とすれば，ケーブルの変形量と補剛桁の変形量を分けて求めることが出来る。

$$\begin{Bmatrix}\xi_s\\ \eta_s\end{Bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}\gamma' & \\ & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_H & B_H\\ B_H & C_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar\gamma' & \\ & \bar\gamma\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \\ & D_s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\gamma' & \\ & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_H & B_H\\ B_H & C_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar\beta & \\ & \bar\beta\end{bmatrix}\times\left\{\begin{bmatrix}\alpha\beta & \\ & \alpha\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_c & & B_c & \\ & A_H & & B_H \\ B_c & & C_c & \\ & B_H & & C_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar\alpha & \\ \bar\beta & \\ & \bar\alpha \\ & \bar\beta\end{bmatrix}\right\}^{-1}\times\begin{bmatrix}\beta & \\ & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_H & B_H\\ B_H & C_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar\gamma' & \\ & \bar\gamma\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{Bmatrix}0\\ \bar V_s\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\xi_c\\ \eta_c\end{Bmatrix}=-\left\{\begin{bmatrix}\alpha\beta & \\ & \alpha\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_c & & B_c & \\ & A_H & & B_H \\ B_c & & C_c & \\ & B_H & & C_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar\alpha & \\ \bar\beta & \\ & \bar\alpha \\ & \bar\beta\end{bmatrix}\right\}^{-1}\times\begin{bmatrix}\beta & \\ & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_H & B_H\\ B_H & C_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar\gamma' & \\ & \bar\gamma\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\xi_s\\ \eta_s\end{Bmatrix} \qquad \text{-------- 13}$$

$$\begin{Bmatrix}T_c\\ T_H\\ M_s\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}G_c^{-1} & & \\ & G_H^{-1} & \\ & & -F_s^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{xac}\bar\alpha & C_{yac}\bar\alpha & & \\ C_{xaH}\bar\beta & C_{yaH}\bar\beta & C_{xaH}\bar\gamma' & C_{xaH}\bar\gamma \\ & & & \bar{\bar Z}_s\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\xi_c\\ \eta_c\\ \xi_s\\ \eta_s\end{Bmatrix}$$

ただし，A，B，Cはそれぞれ $A=\frac{1}{\ell a^3}\{(T_a+T)\cdot b^2+EA\cdot a^2\}$，$B=-\frac{a\cdot b}{\ell a^3}\{(T_a+T)-EA\}$，$C=\frac{1}{\ell a^3}\{(T_a+T)\cdot a^2+EA\cdot b^2\}$ を番号順に並べた対角行列である。

2、吊橋の張力を未知数にとった場合の解法.

11式を変形して次の如く表わす。

$$\left[\begin{array}{cccc|c}
\alpha A_c\bar\alpha & \alpha B_c\bar\alpha & & & \beta C_{xaH}\\
\alpha B_c\bar\alpha & \alpha C_c\bar\alpha & & & \beta C_{yaH}\\
 & & & & \gamma' C_{xaH}\\
 & & & D_s & \gamma C_{yaH}\\ \hline
C_{xaH}\bar\beta & C_{yaH}\bar\beta & C_{xaH}\bar\gamma' & C_{yaH}\bar\gamma & -G_H
\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\xi_c\\ \eta_c\\ \xi_s\\ \eta_s\\ \hline T_H\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}H_c\\ \bar V_c\\ H_s\\ \bar V_s\\ \hline 0\end{array}\right\} \qquad \text{-------- 14.}$$

14式よりξ_sを消去して，荷重は補剛桁のみに作用するものとすれば

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
\alpha A_c\bar\alpha & \alpha B_c\bar\alpha & & \beta C_{xaH}\\
\alpha B_c\bar\alpha & \alpha C_c\bar\alpha & & \beta C_{yaH}\\
 & & D_s & \gamma C_{yaH}\\ \hline
C_{xaH}\bar\beta^{*} & C_{yaH}\bar\beta^{*} & C_{yaH}\bar\gamma^{*} & -G_H
\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\xi_c\\ \eta_c\\ \eta_s\\ \hline T_H\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ \bar V_s\\ \hline 0\end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned}
[C_{xaH}\bar\beta^{*}] &= [C_{xaH}\bar\beta]-[C_{xaH}\bar\gamma'][H][C_{xaH}\bar\beta]\\
[C_{yaH}\bar\beta^{*}] &= [C_{yaH}\bar\beta]-[C_{xaH}\bar\gamma'][H][C_{yaH}\bar\beta]\\
[C_{yaH}\bar\gamma^{*}] &= [C_{yaH}\bar\gamma]-[C_{xaH}\bar\gamma'][H][C_{yaH}\bar\gamma]\\
[H] &= \left[[\gamma' C_{xaH}][G_H^{-1}][C_{xaH}\bar\gamma']\right]^{-1}[\gamma' C_{xaH}][G_H^{-1}]
\end{aligned} \qquad \text{-------- 15.}$$

15式を点線の部分で分割してT_Hを求めると次の如くになる。

$$\{T_H\}=\left[[G_H]+[C_{xaH}\bar\beta^{*}\ C_{yaH}\bar\beta^{*}\ C_{yaH}\bar\gamma^{*}]\begin{bmatrix}\alpha A_c\bar\alpha & \alpha B_c\bar\alpha & \\ \alpha B_c\bar\alpha & \alpha C_c\bar\alpha & \\ & & D_s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\beta C_{xaH}\\ \beta C_{yaH}\\ \gamma C_{yaH}\end{bmatrix}\right]^{-1}[C_{yaH}\bar\gamma^{*}][D_s]^{-1}\{\bar V_s\} \qquad \text{-------- 16.}$$

ケーブルの張力 T_c，補剛桁の曲げモーメント M_s，及び変形量は次の如く求められる。

$$\{T_c\} = -[G_c]^{-1}[C_{xac}\bar{\alpha} \quad C_{yac}\bar{\alpha}]\begin{bmatrix}\alpha A_c\bar{\alpha} & \alpha B_c\bar{\alpha} \\ \alpha B_c\bar{\alpha} & \alpha C_c\bar{\alpha}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\beta C_{xaH} \\ \beta C_{yaH}\end{bmatrix}\{T_H\}$$

$$\{M_s\} = -[F_s^{-1}\bar{Z}_s][D_s]^{-1}[\{V_s\} - [\gamma C_{yaH}]\{T_H\}]$$

$$\begin{Bmatrix}\xi_c \\ \eta_c \\ \eta_s\end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha A_c\bar{\alpha} & \alpha B_c\bar{\alpha} & \\ \alpha B_c\bar{\alpha} & \alpha C_c\bar{\alpha} & \\ & & D_s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\beta C_{xaH} \\ \beta C_{yaH} \\ \gamma C_{yaH}\end{bmatrix}\{T_H\} + \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ D_s^{-1}\end{bmatrix}\{V_s\}$$

3，吊材の伸びを無視した場合の解法

14式を変形して

$$\left[\begin{bmatrix}\alpha A_c\bar{\alpha} & \alpha B_c\bar{\alpha} & \\ \alpha B_c\bar{\alpha} & \alpha C_c\bar{\alpha} & \\ & & D_s\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta C_{xaH} \\ \beta C_{yaH} \\ \gamma' C_{xaH} \\ \gamma C_{yaH}\end{bmatrix}[G_H^{-1}][C_{xaH}\bar{\beta} \quad C_{yaH}\bar{\beta} \quad C_{xaH}\bar{\gamma}' \quad C_{yaH}\bar{\gamma}]\right]\begin{Bmatrix}\xi_c \\ \eta_c \\ \xi_s \\ \eta_s\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}H_c \\ V_c \\ H_s \\ V_s\end{Bmatrix} \quad \text{------------17.}$$

吊材の伸びが非常に小さいものとすれば

$$[C_{xaH}\bar{\beta} \quad C_{yaH}\bar{\beta} \quad C_{xaH}\bar{\gamma}' \quad C_{yaH}\bar{\gamma}]\begin{Bmatrix}\xi_c \\ \eta_c \\ \xi_s \\ \eta_s\end{Bmatrix} = [G_H]\{T_H\} = [0] \quad \text{----------18}$$

$$\begin{Bmatrix}\xi_c \\ \eta_c \\ \xi_s \\ \eta_s\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\Lambda \\ \Lambda^*\end{Bmatrix}, \quad [C_{xaH}\bar{\beta} \quad C_{yaH}\bar{\beta} \quad C_{xaH}\bar{\gamma}' \quad C_{yaH}\bar{\gamma}] = [\Sigma \ \Sigma^*]$$

とおき18式を解くと

$$\begin{Bmatrix}\Lambda \\ \Lambda^*\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-\Sigma^{-1}\Sigma^* \\ E\end{bmatrix}\{\Lambda^*\} \qquad E：単位行列 \quad \text{-------- 19}$$

19式を17式に代入して，左から $[-\Sigma^{-1}\Sigma^* \quad E]$ をかけて整頓すると，$H_c = V_c = H_s = [0]$ として，

$$[-\Sigma^{-1}\Sigma^* \quad E]\begin{bmatrix}\alpha A_c\bar{\alpha} & \alpha B_c\bar{\alpha} & \\ \alpha B_c\bar{\alpha} & \alpha C_c\bar{\alpha} & \\ & & D_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\Sigma^{-1}\Sigma^* \\ E\end{bmatrix}\{\Lambda^*\} = [-\Sigma^{-1}\Sigma^* \quad E]\begin{Bmatrix}0 \\ 0 \\ 0 \\ V_s\end{Bmatrix} \quad \text{-------- 20}$$

20式を解けば $\{\Lambda^*\}$ が求まり19式に代入すれば，各節点の変位を求めることが出来る。

Ⅲ.1 の変形を未知数とした解法はいわゆる変形法に相当するものであり，Ⅲ.2 の吊材の張力を未知数とした解法は吊橋に特有なケーブルと補剛桁を吊材で結合した形状に着目して解析するものである。　Ⅲ、3 は吊橋の性質として許容されるであろう吊材の伸びを無視して解析する方法である。　Fig2 は活荷重による部材力 T を無視して計算したものを，Bleich の理論と比較したものである。本解法をまとめるに当り法政大学大地教授の御教示を得た。又プログラム化に当り，早稲田大学学生加藤誠一，渡辺保之両君の協力を得た。ここに記して感謝の意を表する。

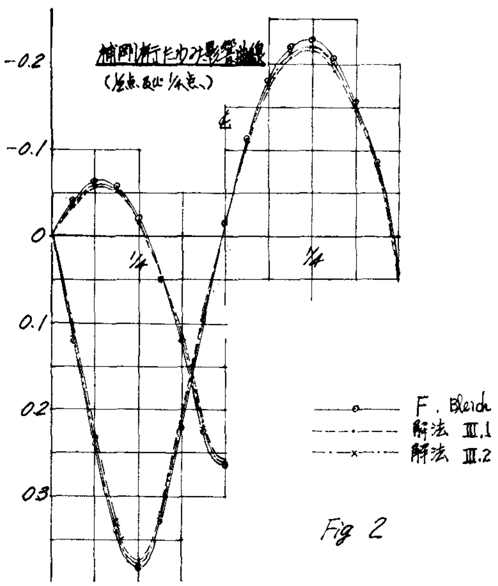


Fig 2