

京都大学工教 正員 米沢 博

京都大学工教 正員 〇三上 市蔵

まなび 曲線橋の普及に伴って曲線格子桁構造の弾性解析に関する研究が盛んに行われてきたが、曲線格子桁構造の安全度などを知るためには極限解析が簡便でありかつ適当な方法と考えられる。著者らは、これまで2本の曲線主桁と1本の橋桁よりなる曲線格子桁^{1), 2), 3)}を対象にし、曲線主桁の支持条件および荷重条件を種々変えて極限解析を行なってきた。ところが実際の曲線桁橋においては、内外の主桁ができるだけ一体となつて外力に抵抗するように、多数の横桁によつて内外主桁が相当剛に結合されている場合がほとんどである。したがつて今回はこのような横桁多数を有する曲線桁橋構造の極限解析を試みた。すなわち、両端で曲げおよびねじりに対して固定された2本の曲線主桁と多数の横桁とよりなる曲線格子桁の、外桁もしくは内桁のスパン中央に集中荷重が作用する場合について極限解析を行なつた。この解析結果は連続曲線橋の中央支間あるいは主桁が強固なラーメン構造などに剛結された曲線橋などに適用できるものである。

降伏条件式 格子桁構造の各部材は完全塑性体であると仮定し、かつ実際の構造では箱桁などのような薄肉構造があるが、すべて線構造物とし、かつ崩壊するまでに座屈などの不安定現象は生じないものとして取り扱う。図-1に示すように内外各主桁は同心円弧上にあり、その両端で曲げおよびねじりに抵抗できるように固定されているものとする。降伏条件式としては、せん断力および軸力の影響を無視して、つぎの式を用いることにする。

$$m^2 + t^2 = 1 \quad (1)$$

ただし、 $m = M/M_p$ 、 $t = T/T_p$ で、 M および T は任意断面の曲げモーメントおよびねじりモーメントであり、 M_p および T_p はそれぞれの断面の全塑性曲げモーメントおよび全塑性ねじりモーメントである。断面の形状によつて決まる定数 α を用いると $T_p = \alpha M_p$ なる関係

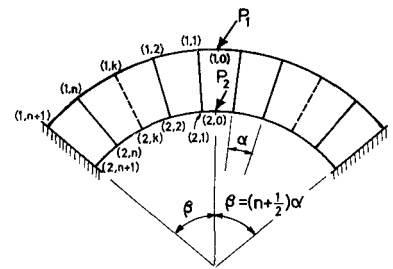
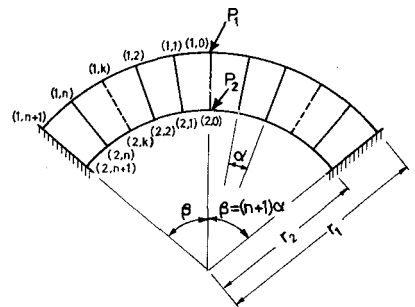
(a) 偶数の場合 ($N = 2n$)(b) 奇数の場合 ($N = 2n + 1$)

図-1

- 1) 米沢, 三上: "曲線格子桁の極限解析について", 土木学会論文集, 第132号, 昭41.8.
- 2) 米沢, 三上: "曲線格子桁の極限解析について(線荷重載荷の場合)", 京都大学工業教員養成所研究報告, 第3号, 昭41.11.
- 3) 米沢, 三上, 嵯峨: "曲線格子桁の極限解析", 土木学会関西支部年次学術講義会概要, 昭41.11.

がある。 $\phi = t/\nu m$ とおくと式(1)より m , t はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} m &= \pm 1/\sqrt{(\nu\phi)^2 + 1} \\ t &= \pm \nu\phi/\sqrt{(\nu\phi)^2 + 1} \end{aligned} \right\} (2)$$

(複号同順)

つりあい条件式 ここでは集中荷重が外桁のスパン中央に作用する場合 (Case 1) と、内桁のスパン中央に作用する場合 (Case 2) を取り扱う。外桁および内桁の断面形は相似であり、横桁はすべて同一断面で、そのねじり抵抗は無視できるものとする。図-2 に示すように両主桁をそれぞれ固定端とスパン中央断面で、すべての横桁を両格点でそれぞれ切断して、各部分のつりあいを考える。

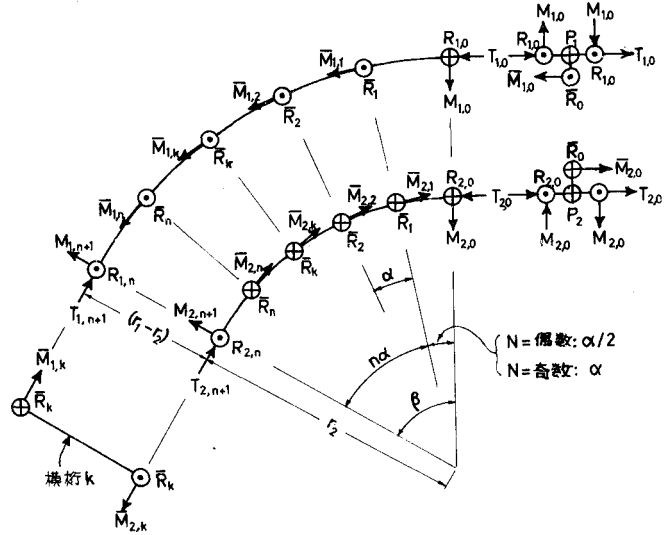


図-2

外桁および内桁においてつぎの式がなりたつ。

$$m_{1,0} - m_{1,n+1} \cos \beta - (\nu t_{1,n+1} + \tau_{1,n}) \sin \beta + j \sum_{k=1}^n [\bar{m}_{1,k} - \rho \bar{\tau}_k / (\rho - 1)] \sin \theta = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \nu t_{1,0} + m_{1,n+1} \sin \beta - (\nu t_{1,n+1} + \tau_{1,n}) \cos \beta + \tau_{1,n} \\ + j \sum_{k=1}^n \{ [\bar{m}_{1,k} - \rho \bar{\tau}_k / (\rho - 1)] \cos \theta + \rho \bar{\tau}_k / (\rho - 1) \} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$m_{2,0} - m_{2,n+1} \cos \beta - (\nu t_{2,n+1} + \tau_{2,n}) \sin \beta - (j/i) \sum_{k=1}^n [\bar{m}_{2,k} - \bar{\tau}_k / (\rho - 1)] \sin \theta = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \nu t_{2,0} + m_{2,n+1} \sin \beta - (\nu t_{2,n+1} + \tau_{2,n}) \cos \beta + \tau_{2,n} \\ - (j/i) \sum_{k=1}^n \{ [\bar{m}_{2,k} - \bar{\tau}_k / (\rho - 1)] \cos \theta + \bar{\tau}_k / (\rho - 1) \} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\tau_{1,0} - \tau_{1,n} - \{ \rho j / (\rho - 1) \} \sum_{k=1}^n \bar{\tau}_k = 0 \quad (7) \quad \tau_{2,0} - \tau_{2,n} + \{ j / i (\rho - 1) \} \sum_{k=1}^n \bar{\tau}_k = 0 \quad (8)$$

ただし、横桁数 N が奇数のとき $\theta = k\alpha$ 、偶数のとき $\theta = (k - \frac{1}{2})\alpha$ とおく。

すべての横桁においてつぎの式がなりたつ。

$$\bar{m}_{1,k} - \bar{m}_{2,k} - \bar{\tau}_k = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

またスパン中央の格点 (10), (20) においてつぎの式がなりたつ。

$$\mu_1 = 2\tau_{1,0} + [j\rho/(\rho-1)]\bar{\tau}_0 \quad (10) \quad t_{1,0} - (j/2\nu)\bar{m}_{1,0} = 0 \quad (11)$$

$$\mu_2 = 2\tau_{2,0} - [j/i(\rho-1)]\bar{\tau}_0 \quad (12) \quad t_{2,0} + (j/2\nu i)\bar{m}_{2,0} = 0 \quad (13)$$

ただし、以上の式において、Case 1 の場合は $\mu_2 = 0$ 、Case 2 の場合は $\mu_1 = 0$ とおき、 $N = \text{偶数}$ のときは $t_{1,0} = t_{2,0} = \bar{\tau}_0 = 0$ とする。また、 $\rho = r_1/r_2$, $\mu_1 = P_1 r_1 / M_{1P}$, $\mu_2 = P_2 r_2 / M_{2P}$, $\tau_{1,k} = R_{1,k} r_1 / M_{1P}$, $\tau_{2,k} = R_{2,k} r_2 / M_{2P}$, $\bar{\tau}_k = \bar{R}_k (r_1 - r_2) / \bar{M}_P$, $i = M_{2P} / M_{1P}$, $j = \bar{M}_P / M_{1P}$, $\nu = T_{1P} / M_{1P} = T_{2P} / M_{2P}$ であり、 M_{1P} , M_{2P} , $\bar{M}_P$ および T_{1P} , T_{2P} はそれぞれ外桁、内桁、横桁の全塑性曲げモーメントおよび外桁、内桁の全塑性ねじりモーメントである。

崩壊荷重 つりあい条件式(3)～(13)と降伏条件式とから反力 q_{10} , q_{20} , $\bar{q}_0$ のいずれか2つを決めれば式(10)もしくは(12)から崩壊荷重 P が求められる。

崩壊形式として **Case 1** および **Case 2** について図-3に示したA, B, Cの3種類の形式を仮定する。このうち形式A, Cは載荷主桁と横桁とが、形式Bは両主桁が同時に崩壊する形式である。この他、AとBまたはCとBを組み合わせた崩壊機構、すなわち両主桁および横桁のいずれにもヒンジが生ずるような崩壊形式が考えられるが、横桁1本の場合にはこれを無視しても誤差は小さい^{1), 2)}ことが明らかになったので、ここでも簡単のため無視することにした。

図-3 崩壊形式

		Case 1		Case 2	
		偶数の場合	奇数の場合	偶数の場合	奇数の場合
崩壊形式	A				
	B				
	C				

Case 1 および **Case 2** のおのおのについて横桁数が偶数および奇数の場合に対して、図-3に仮定した各3種類の崩壊形式に対する崩壊荷重を誘導した結果を示すとつぎのようになる。

$$[A_{1E}] \quad \mu_1 = \frac{w^2 \Phi_{1,n+1} + \cot(\beta/2)}{\sqrt{(w \Phi_{1,n+1})^2 + 1}} + \cot \frac{\beta}{2} + j \left[\frac{2n\rho}{\rho-1} + \frac{\rho+1}{\rho-1} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\sin(k\rho/2)}{\sin \beta} \right] \quad (14)$$

$$\text{ただし,} \quad \frac{w^2 \Phi_{1,n+1} - \tan(\beta/2)}{\sqrt{(w \Phi_{1,n+1})^2 + 1}} + \tan \frac{\beta}{2} + j \left[\frac{2n\rho}{\rho-1} - \frac{\rho+1}{\rho-1} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sin(k\rho/2)}{\sin \beta} \right] = 0 \quad (15)$$

$$[A_{1O}] \quad \mu_1 = \frac{w^2 \Phi_{1,n+1} + \cot(\beta/2)}{\sqrt{(w \Phi_{1,n+1})^2 + 1}} + \sqrt{1 - \left(\frac{j}{2w}\right)^2} \cot \frac{\beta}{2} + j \left[\frac{2(n+1)\rho}{\rho-1} - \frac{1}{2} \right] \quad (16)$$

$$\text{ただし,} \quad \frac{w^2 \Phi_{1,n+1} - \tan(\beta/2)}{\sqrt{(w \Phi_{1,n+1})^2 + 1}} + \sqrt{1 - \left(\frac{j}{2w}\right)^2} \tan \frac{\beta}{2} + j \left[\frac{2n\rho}{\rho-1} + \frac{1}{2} - 2 \frac{\rho+1}{\rho-1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\rho)}{\sin \beta} \right] = 0 \quad (17)$$

$$[A_{2E}] \quad \mu_2 = \frac{w^2 \Phi_{2,n+1} + \cot(\beta/2)}{\sqrt{(w \Phi_{2,n+1})^2 + 1}} + \cot \frac{\beta}{2} + \frac{j}{i} \left[\frac{2n}{\rho-1} + \frac{\rho+1}{\rho-1} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\sin(k\rho/2)}{\sin \beta} \right] \quad (18)$$

$$\text{ただし,} \quad \frac{w^2 \Phi_{2,n+1} - \tan(\beta/2)}{\sqrt{(w \Phi_{2,n+1})^2 + 1}} + \tan \frac{\beta}{2} + \frac{j}{i} \left[\frac{2n}{\rho-1} - \frac{\rho+1}{\rho-1} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sin(k\rho/2)}{\sin \beta} \right] = 0 \quad (19)$$

$$[A_{2O}] \quad \mu_2 = \frac{w^2 \Phi_{2,n+1} + \cot(\beta/2)}{\sqrt{(w \Phi_{2,n+1})^2 + 1}} + \sqrt{1 - \left(\frac{j}{2wi}\right)^2} \cot \frac{\beta}{2} + \frac{j}{i} \left[\frac{2(n+1)}{\rho-1} + \frac{1}{2} \right] \quad (20)$$

$$\text{ただし, } \frac{v^2 \Phi_{2,n+1} - \tan(\beta/2)}{\sqrt{(v \Phi_{2,n+1})^2 + 1}} + \sqrt{1 - \left(\frac{j}{2v}\right)^2} \tan \frac{\beta}{2} + \frac{j}{i} \left[\frac{2n}{\beta-1} - \frac{1}{2} - 2 \frac{\beta+1}{\beta-1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\alpha)}{\sin \beta} \right] = 0 \quad (21)$$

$$[B_{1E}, B_{10}] \quad \mu_1 = 2(1+i) \cot(\beta/2) \quad (22)$$

$$[B_{2E}, B_{20}] \quad \mu_2 = 2(1+1/i) \cot(\beta/2) \quad (23)$$

$$[C_{1E}] \quad \mu_1 = 2 \left[\frac{v^2 \sin^2(n\alpha) + (\beta - \cos n\alpha)^2}{\sqrt{v^2 \sin^2(n\alpha) + (\beta - \cos n\alpha)^2}} + \beta \cos \beta - \cos(\alpha/2) + \left\{ j/(\beta-1) \right\} \left\{ (\beta+1)^2 \sum_{k=1}^n \sin(k\alpha) - (2n\beta + \beta+1) \sin(n\alpha) \right\} \right] / [\beta \sin \beta - \{ \sin(n\alpha) + \sin(\alpha/2) \}] \quad (24)$$

$$[C_{10}] \quad \mu_1 = \frac{[(\beta+1)/(\beta-1)] v^2 \Phi_{1,0} + \cot(\beta/2)}{\sqrt{(v \Phi_{1,0})^2 + 1}} + \frac{v^2 \Phi_{1,n+1} + \cot(\beta/2)}{\sqrt{(v \Phi_{1,n+1})^2 + 1}} + \frac{(2n+1)j}{\beta-1} \quad (25)$$

$$\text{ただし, } \Phi_{1,0} = [\Phi_{1,n+1}(\beta - \cos \beta) + \sin \beta] / (\beta-1) [\Phi_{1,n+1} \sin \beta + \cos \beta] \quad (26)$$

$$\frac{v^2 \Phi_{1,0} + \tan(\beta/2)}{\sqrt{(v \Phi_{1,0})^2 + 1}} + \frac{v^2 \Phi_{1,n+1} - \tan(\beta/2)}{\sqrt{(v \Phi_{1,n+1})^2 + 1}} + \frac{j}{i} \left[\frac{2n\beta}{\beta-1} - 2 \frac{\beta+1}{\beta-1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k\alpha}{\sin \beta} \right] = 0 \quad (27)$$

$$[C_{2E}] \quad \mu_2 = 2 \left[\pm \sqrt{v^2 \sin^2(n\alpha) + (1 - \beta \cos n\alpha)^2} + \cos \beta - \beta \cos(\alpha/2) + \left\{ j/i(\beta-1) \right\} \left\{ (\beta+1)^2 \sum_{k=1}^n \sin k\alpha - \beta(2n + \beta+1) \sin(n\alpha) \right\} \right] / [\sin \beta - \beta \{ \sin(n\alpha) + \sin(\alpha/2) \}] \quad (28)$$

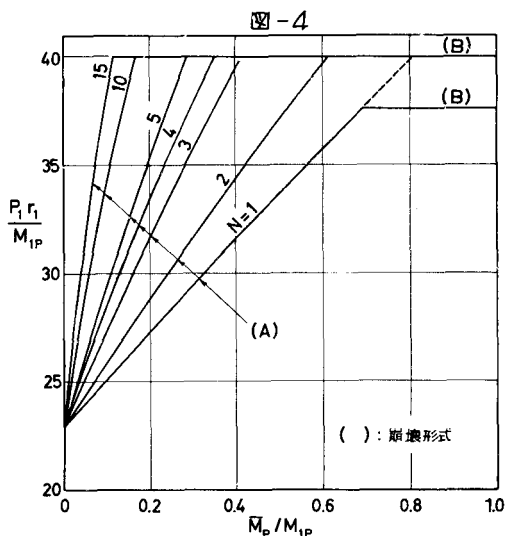
ただし、複号は $\beta < \sec(n\alpha)$ のとき(+)を、 $\beta > \sec(n\alpha)$ のとき(-)をとる。

$$[C_{20}] \quad \mu_2 = \frac{-[(\beta+1)/(\beta-1)] v^2 \Phi_{2,0} + \cot(\beta/2)}{\sqrt{(v \Phi_{2,0})^2 + 1}} + \frac{v^2 \Phi_{2,n+1} + \cot(\beta/2)}{\sqrt{(v \Phi_{2,n+1})^2 + 1}} + \frac{(2n+1)j}{(\beta-1)i} \quad (29)$$

$$\text{ただし, } \Phi_{2,0} = -[\Phi_{2,n+1}(1 - \beta \cos \beta) + \beta \sin \beta] / (\beta-1) [\Phi_{2,n+1} \sin \beta + \cos \beta] \quad (30)$$

$$\frac{v^2 \Phi_{2,0} + \tan(\beta/2)}{\sqrt{(v \Phi_{2,0})^2 + 1}} + \frac{v^2 \Phi_{2,n+1} - \tan(\beta/2)}{\sqrt{(v \Phi_{2,n+1})^2 + 1}} + \frac{j}{i} \left[\frac{2n}{\beta-1} - 2 \frac{\beta+1}{\beta-1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k\alpha}{\sin \beta} \right] = 0 \quad (31)$$

数値計算 数値計算の一例として、Case 1 に対して、箱断面主桁 $v = 2/\sqrt{3}$ (von Mises の降伏条件を採用)、橋軸に沿ったスパンと幅員の比 $\alpha = 4$ 、 $\beta = 10^\circ$ 、 $M_{2p}/M_{1p} = 0.75$ の場合について、横桁数 N を種々変化させた場合の崩壊荷重と崩壊形式の関係を図-4 に示した。図から崩壊形式 A が生ずる範囲では横桁数 N を増すと崩壊荷重は増大することがわかる。この場合、横桁が 5 本程度以上になると、 $\frac{1}{2}N$ 倍の断面をもった横桁 1 本の曲線格子桁と考えて得られる崩壊荷重にはほぼ等しくなる。また横桁の断面 (M_p) を大きくすれば崩壊荷重は増すが、ある程度以上になると両主桁が崩壊する形式 B が生じ、耐荷力の増大は期待できなくなる。この崩壊形式 B に対する式 (22)、(23) は N に無関係であり、かつ両主桁の断面の合計の断面 ($M_{1p} + M_{2p}$) をもった単独の曲線格子桁の崩壊荷重⁴⁾と一致する。



4) Imegwu, E. O., "Ultimate Strength of Plane Curved Girders", Structural Engineer, Vol.42, 1964, p.129-134.