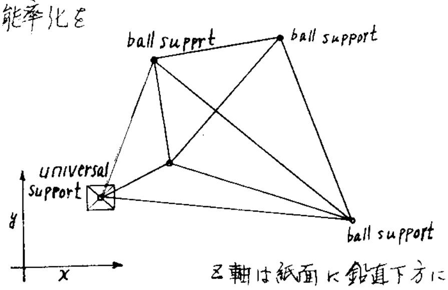
I－73　位相数学によるトラスの解法

大阪大学　正員　小松定夫
大阪大学　学生員　○佐々木孝

1. まえがき

本報告は位相数学を構造物の解析に応用するのを目的として、ここではトラスを対象にして linear graph の応用により、つり合方程式を機械的に作成し、係数行列の逆行列を求める際に、計算時間の短縮のため、Signal flow graph を利用して、計算の能率化を試みたものである。



Z軸は紙面に鉛直下方に正の方向をとる。
(図－1)

2. 静定トラス

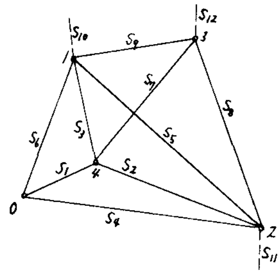
与えられたトラス(図－1)に対応する linear graph を図－2のように作る。そこで点線の枝路 S_{10}, S_{11}, S_{12} は仮想の部材に置換えられた支点反力に対応するものである。次に節点0を Reference node として incidence matrix $\mathbb{A}$ を作り、それを使って行列 $\mathbb{F}$ を次のように定義する。

$$\mathbb{A}_1 = [a_{kj}] \qquad k = 1, 2, \cdots, n \quad j = 1, 2, \cdots, 3n$$

$$\mathbb{F} = [\mathbf{f}_{kj}] = [f_{ij}] \qquad i = 1, 2, \cdots, 3n$$

$$\mathbf{f}_{kj} = \begin{bmatrix} a_{kj}\, l_j \\ a_{kj}\, m_j \\ a_{kj}\, n_j \end{bmatrix}$$

l_j, m_j, n_j は部材 S_j の x, y, z 方向の方向余弦で、S_j の方向は節点から出ていくものとする。



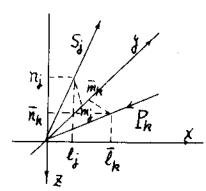
(図 2)

次に部材力及び節点荷重を $\mathbb{S}$, $\mathbb{P}$ で表わすと

$$\mathbb{S} = [S_j] \qquad \mathbb{P} = [\mathbb{P}_k] = [P_i]$$

$$\mathbb{P}_k = \begin{bmatrix} P_k\, \bar{l}_k \\ P_k\, \bar{m}_k \\ P_k\, \bar{n}_k \end{bmatrix}$$

P_k は節点 k に作用する荷重であり、$\bar{l}_k$, $\bar{m}_k$, $\bar{n}_k$ は P_k の x, y, z 方向の方向余弦で、その P_k の方向は節点に入ってくるものとする。



(図－3)

これらの行列 $\mathbb{F}$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{P}$ によって節点のつり合を考えると、

$$\mathbb{F} \cdot \mathbb{S} = \mathbb{P} \qquad \text{———(1)}$$

式－(1)について signal flow graph を作り、T_{ij}, Δ, Δ_{ij} を求めると

$$S_j^i = \frac{1}{\Delta}(P_i \Sigma T_{ij} \Delta_{ij})$$

（Σは T_{ij} のとりうる場合のすべての和を表わす。）

$$S_j^j = \frac{1}{\Delta}(P_j \Delta_{jj})$$

T_{ij} ; 節点 i から j への forward path product

$$S_j = \sum_i S_j^i$$

$$\Delta = \det \mathbb{F} = 1 - \sum_p L_p + \sum_{p,q} L_p \cdot L_q - \sum_{p,q,r} L_p L_q \cdot L_r + \cdots + (-1)^d \sum_{p,q,r \cdots m} L_p L_q L_r \cdots L_m$$

これを行列表示すると、

L_p, L_q, L_r, ……, L_m は夫夫節点、枝路を共有しない feed back loop の weight product である。

$$g_{ij} = \frac{1}{\Delta}(\Sigma T_{ij} \Delta_{ij})$$

$$g_{ij} = \Delta_{ij} / \Delta$$

Δ_{ij} ; T_{ij} 及び節点 i, j, それに incident する枝路を取除いて Δ と同様

$\mathbb{G} = (g_{i,j})^t$ 　　にして求めたものである。

$\mathbb{S} = \mathbb{G}\mathbb{P}$ 　　——(2) 　　Δ_{jj}；節点 i, j とそれに incident する枝路を取除いて Δ と同様にして求めたものである。

2. 不静定トラス

内的不静定の場合　　係数行列 $\mathbb{F}$ を静定部材に対応する行列 $\mathbb{F}_1$ と不静定部材に対応する行列 $\mathbb{F}_2$ に分ける。$\mathbb{S}$ についても同様にすると、式—(1)は

$$\mathbb{F}\mathbb{S} = [\mathbb{F}_1 \mathbb{F}_2][\mathbb{S}_1 \mathbb{S}_2]^t = \mathbb{F}_1\mathbb{S}_1 + \mathbb{F}_2\mathbb{S}_2 = \mathbb{P}$$

$$\therefore \mathbb{F}_1\mathbb{S}_1 = (\mathbb{P} - \mathbb{F}_2\mathbb{S}_2) \qquad \text{—— (3)}$$

式—(3)に於て $(\mathbb{P} - \mathbb{F}_2\mathbb{S}_2)$ を荷重項にして signal flow graph を作り、$\mathbb{S}_1$ を求めると

$$\mathbb{S}_1 = \mathbb{G}_1(\mathbb{P} - \mathbb{F}_2\mathbb{S}_2) \qquad \text{—— (4)}$$

次に歪エネルギー U を考えると、

$$U = \frac{1}{2}\mathbb{S}^t\Gamma\mathbb{S} = \frac{1}{2}(\mathbb{S}_1^t\Gamma_{11}\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2^t\Gamma_{22}\mathbb{S}_2) = \frac{1}{2}\{(\mathbb{P} - \mathbb{F}_2\mathbb{S}_2)^t\Lambda(\mathbb{P} - \mathbb{F}_2\mathbb{S}_2)\}$$

$$\Lambda = \mathbb{G}_1^t\Gamma_{11}\mathbb{G}_1 \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} C_{11} & & 0 \\ & C_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & C_{3n3n} \end{bmatrix} \qquad C_{jj} = \left(\frac{\text{部材}j\text{の長さ}}{\text{断面積} \times \text{ヤング率}}\right) \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \qquad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = 0$$

Γ_{11}, Γ_{22} は夫夫 $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$ に対応する。

U を $\mathbb{S}_2$ について微分すると、Castigliano の定理により、

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbb{S}_2} = -\mathbb{F}_2^t\Lambda\mathbb{P} + (\mathbb{F}_2^t\Lambda\mathbb{F}_2 + \Gamma_{22})\mathbb{S}_2 = 0 \qquad \therefore \mathbb{S}_2 = (\mathbb{F}_2^t\Lambda\mathbb{F}_2 + \Gamma_{22})(\mathbb{F}_2^t\Lambda\mathbb{P}) \qquad (5)$$

式—(5)の $(\mathbb{F}_2^t\Lambda\mathbb{F}_2 + \Gamma_{22})$ は次数が不静定次数と一致して、$\mathbb{F}_1$ に比べると十分低いので直接逆行列を求める事にする。たとえば平面構造のダブルワーレントラスでは、不静定次数 r に対して $\mathbb{F}_1$ の次数は $4r+6$ となり約4倍である。式—(5)から $\mathbb{S}_2$ が求まると、式—(4)によって $\mathbb{S}_1$ が求まる。外的不静定の場合にも、$\mathbb{G}_1$ によって同様に解くことができる。

3. 計算例

右図のようなダブルワーレントラスについて計算を行なった。下図はそれに対応する signal flow graph である。

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 125.86367 \\ 104.72385 \\ -195.81074 \\ 59.10422 \\ -163.85697 \\ 9.44770 \\ 129.82749 \\ 59.10422 \\ 129.82749 \\ 104.72385 \\ -163.85696 \\ -195.81074 \\ 125.86367 \\ -149.99999 \\ -6.16659 \\ -6.16659 \end{bmatrix}$$