

九州大工学部	正員	山崎徳止
K. K. 造船所	"	坂田静雄
九州大工学部	"	〇 榎木 武

1. 緒言 鉄筋コンクリート構造におけるハンチヤ鋼桁におけるフランジ厚の変化、柱とはりとは結合する節点近傍の剛域など断面二次モーメントが部材全長にわたって一定でない骨組構造物が多く見受けられ、かかる構造物の解法に關してこれ迄多くの研究¹⁾が行われてきた。しかし、これら既往の研究は部材断面の変化と剛域の問題とが別々の観点にたつて処理されておられ、また断面変化が特定の数式で表わされる場合に関するものが大多数である。これらに対し、本研究は先に著者らが文献²⁾、³⁾で報告したフーリエ級数による骨組構造の解法を拡張適用し、任意垂直荷重が作用する場合について剛域をも考慮した階段状変断面骨組構造の厳密解法ならびに任意形状変断面骨組構造の近似解法を提示し、直接的にはかかる骨組構造および板と変断面骨組とからなる一体構造物の解析ならびに設計に、また、直接的には変厚矩形板および変厚無梁板の解法に資するものである。

2. 基本式 図-1(a)に示すごとく、階段状変断面はりには任意垂直荷重 $p(x)$ および端モーメント M_A, M_B が作用するものとする(保荷重)。また階段状に変化するはりの断面二次モーメントは全体で R 区間に分割され、各区間 $i, 1, \dots, i, \dots, R$ の断面二次モーメントをそれぞれ $I_1, I_2, \dots, I_i, \dots, I_R$ 、これらと標準断面二次モーメント I_0 との比を $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_R$ とする。はり上の i 区間の任意点 x におけるたわみ y と曲げモーメント M_x との関係は周知のごとく次式で表わされる。
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI_i} = -\frac{M_x}{EI_0 \omega_i} \quad (\text{こゝに、} M_x = \frac{M_0}{\omega_i}) \quad \dots (1)$$

M_0 を変断面の曲げモーメントと考えれば、式(1)は変断面のたわみが断面二次モーメント I_0 なるはりに曲げモーメント M_0 が作用する場合の解として与えられることを意味し、このことについて詳しく観察すれば次のごとき取扱ひ手法が考案される。図-1(b)に示すごとく、変断面はりのモーメント図が曲線 $ACDB$ と与えられるものとする。かかるとき、 M_0 は M_0/ω_i と与えられるから曲線 $A'C'D'B'$ となる。換言すれば、 i 区間の M_x -曲線 $C'D'$ ははりの M_x -曲線 CD から図-1(b)の斜線部 $CC'D'D$ を差引いたものである。したがって、斜線部 $CC'D'D$ を負のモーメント図として与えることと適當な荷重状態(補正荷重)を求めれば、図-1(a)の階段状変断面はり(保荷重)を解くことは変断面と補正荷重が同時に作用する断面二次モーメント I_0 の等断面はり(置換はり)を解くこととなる。

(1) 補正荷重の決定 保荷重のうち $p(x)$ を正弦フーリエ級数に展開すれば、はり上の任意点 x における曲げモーメント M_0 は次式で与えられる(文献³⁾参照)。

$$M_0 = M_A - (M_A + M_B) \frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 p_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{こゝに} \quad p_n = \frac{2}{l} \int_0^l p(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad \dots (2)$$

ところで、 i 区間を一つの単純はりで見做し、その負モーメント図が図-1(b)の斜線部 $CC'D'D$ に

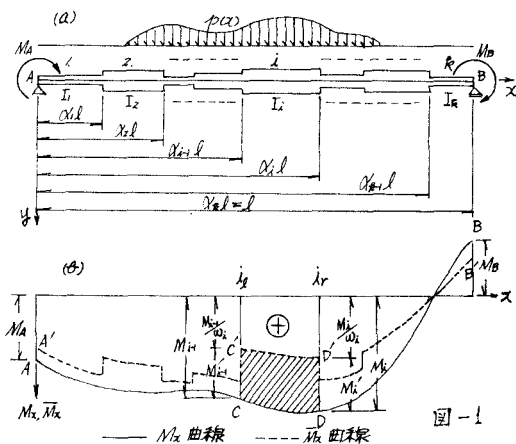
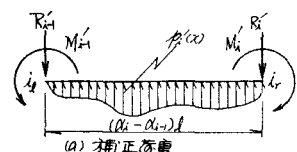


図-1

よって与えられるべき荷重状態を図-2(a)のごとく想定する。すなわち、 M_A' , M_B' は支変 λ_0 , λ_1 に働く端モーメントであり、図-1(b)の CC' および DD' で与えられる。また、 $p(x)$ は図-1(b)の斜線部 $CC'DD'$ から、上記 M_A' , M_B' の影響を差引いた部分 (図-2(b)の斜線部) のモーメントを与えざるべき荷重である。さらに、 R_A' および R_B' は支変 λ_0 および λ_1 の支変反力であり、 $p(x)$, M_A' および M_B' の影響が λ 区間以外の諸断面力および諸変位におよぶことを阻止する。以上の考察より、はりの λ 区間における各種の荷重を求め、その結果のサメは以下通りである。

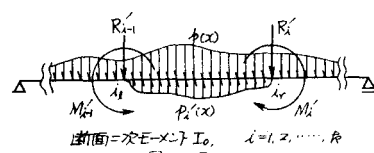


$$\left. \begin{aligned} \lambda \text{ 区間 } (\alpha_{i-1}l, \alpha_i l) \text{ について: } & p(x) = (1-\frac{1}{\omega_i}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\pi} p_m \sin \frac{m\pi}{l} x \\ & M_A' = (1-\frac{1}{\omega_i}) \{ M_A(1-\alpha_{i-1}) - M_B \alpha_{i-1} \} + (1-\frac{1}{\omega_i}) \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{1}{m\pi})^2 p_m \sin m\pi \alpha_{i-1} \\ & R_A' = -\frac{1}{l} (1-\frac{1}{\omega_i}) (M_A + M_B) + (1-\frac{1}{\omega_i}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\pi} p_m \cos m\pi \alpha_{i-1} \\ & M_B' = (1-\frac{1}{\omega_i}) \{ M_A(1-\alpha_i) - M_B \alpha_i \} + (1-\frac{1}{\omega_i}) \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{1}{m\pi})^2 p_m \sin m\pi \alpha_i \\ & R_B' = \frac{1}{l} (1-\frac{1}{\omega_i}) (M_A + M_B) - (1-\frac{1}{\omega_i}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\pi} p_m \cos m\pi \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

こゝに $i = 1, 2, \dots, R$

梁荷重と式(3)の補正荷重が同時に作用する場合の λ 区間の任意変位におけるモーメント $\bar{M}_x$ を求めれば $\bar{M}_x = \frac{M_x}{\omega_i}$ なる結果をえ、式(3)の補正荷重が正しいことを知る。

(2) ためけおよびたわめ角 階段状変位断面はりのたわめおよびたわめ角は梁荷重と式(3)の補正荷重が同時に作用する置換はりのためけおよびたわめ角で与えられる (図-3参照)。梁荷重 $p(x)$, M_A , M_B および各種の荷重を正弦フーリエ級数展開式にて表せば次のとおりである。



$$\left. \begin{aligned} \{p(x)\}_{sf} &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \{M_A\}_{sf} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{An} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \{M_B\}_{sf} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{Bn} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \{p(x)\}_{sf} &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \{R_A'\}_{sf} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \{R_B'\}_{sf} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \{M_A'\}_{sf} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \{M_B'\}_{sf} = \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (i=1, 2, \dots, R) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(ただし、 $\{ \}_{sf}$ は各力およびモーメントの正弦フーリエ級数展開式であることを意味するもの、すなわち $[F]_{sf}$ の次元をあらわす)

$$\begin{aligned} \text{こゝに、} & p_n = (1-\frac{1}{\omega_i}) \sum_{m=1}^{\infty} p_m I(m, n, i), \quad M_{An} = -\frac{2n\pi}{l^2} M_A, \quad M_{Bn} = -(1)^n \frac{2n\pi}{l^2} M_B \\ & A_{in} = (1-\frac{1}{\omega_i}) \frac{2}{l} \sin n\pi \alpha_{i-1} \{ -\frac{1}{l} (M_A + M_B) + \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{1}{m\pi})^2 p_m \cos m\pi \alpha_{i-1} \} \\ & A_{in} = (1-\frac{1}{\omega_i}) \frac{2}{l} \sin n\pi \alpha_i \{ \frac{1}{l} (M_A + M_B) - \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{1}{m\pi})^2 p_m \cos m\pi \alpha_i \} \\ & B_{in} = (1-\frac{1}{\omega_i}) \frac{2n\pi}{l^2} \cos n\pi \alpha_{i-1} \{ M_A(1-\alpha_{i-1}) - M_B \alpha_{i-1} + \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{1}{m\pi})^2 p_m \sin m\pi \alpha_{i-1} \} \\ & B_{in} = -(1-\frac{1}{\omega_i}) \frac{2n\pi}{l^2} \cos n\pi \alpha_i \{ M_A(1-\alpha_i) - M_B \alpha_i + \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{1}{m\pi})^2 p_m \sin m\pi \alpha_i \} \\ & I(m, n, i) = \begin{cases} (m \neq n \text{ の場合}) & \frac{2}{(n^2 - m^2)\pi} \{ m(\cos m\pi \alpha_i \sin n\pi \alpha_{i-1} - \cos m\pi \alpha_{i-1} \sin n\pi \alpha_i) - n(\sin m\pi \alpha_i \cos n\pi \alpha_{i-1} \\ & \quad - \sin m\pi \alpha_{i-1} \cos n\pi \alpha_i) \} \\ (m = n \text{ の場合}) & \alpha_i - \alpha_{i-1} - \frac{1}{2m\pi} (\sin 2n\pi \alpha_i - \sin 2n\pi \alpha_{i-1}) \end{cases} \end{aligned}$$

置換はりに作用する全荷重を $g(x)$ とすれば、 $g(x)$ は式(4)の総和である次式にて表わされる。

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \text{こゝに、} & g_n = p_n + \sum_{i=1}^R (1-\frac{1}{\omega_i}) \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, i) + \frac{H_{An}}{l^2} M_A + \frac{H_{Bn}}{l^2} M_B \\ & F(m, n, i) = -I(m, n, i) + \frac{2}{m\pi} (\sin n\pi \alpha_{i-1} \cos m\pi \alpha_{i-1} - \sin n\pi \alpha_i \cos m\pi \alpha_i) - \frac{2n}{m\pi} (\cos n\pi \alpha_{i-1} \sin m\pi \alpha_{i-1} - \cos n\pi \alpha_i \sin m\pi \alpha_i) \\ & H_{An} = 2n\pi - 2 \sum_{i=1}^R (1-\frac{1}{\omega_i}) [\sin n\pi \alpha_{i-1} \sin n\pi \alpha_i + n\pi \{ (1-\alpha_{i-1}) \cos n\pi \alpha_{i-1} - (1-\alpha_i) \cos n\pi \alpha_i \}] \\ & H_{Bn} = 2(1)^n n\pi - 2 \sum_{i=1}^R (1-\frac{1}{\omega_i}) [\sin n\pi \alpha_{i-1} \sin n\pi \alpha_i - n\pi \{ \alpha_{i-1} \cos n\pi \alpha_{i-1} - \alpha_i \cos n\pi \alpha_i \}] \end{aligned} \quad (5)$$

両端単純支持の置換ばりに式(5)の荷重 $q(x)$ が作用する場合は、そのたわみ曲線 y は文献(2)の式(10)に示すごとく次式に与えられる。

$$y = \frac{l^4}{EI_0 \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} q_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{--- (6)}$$

すなわち、式(6)は同一(4)に示す階段状変断面ばりのたわみ曲線式である。また、式(6)を微分すれば、階段状変断面ばりの任意点 x におけるたわみ角 θ_x が与えられる。次式とまる。

$$\theta_x = \frac{dy}{dx} = \frac{l^3}{EI_0 \pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} q_n \cos \frac{n\pi}{l} x \quad \text{--- (7)}$$

(3) 計算例 図-4(a)に示すごとく、7変断面区間よりなるばりのたわみ y は式(6)より次のごとく求まる。

$$y = \frac{l^4}{EI_0 \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left\{ p_n + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\omega_n}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, i) \right\} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{--- (8)}$$

図示のごとく、等分布荷重を半載する場合 p_n は次式で与えられる。

$$p_n = \frac{4q_0}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \quad \text{--- (9)}$$

また、各断面の断面二次モーメント I_n が次式のごとく値をとるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 = \omega_4 = \omega_6 = 1.0 \\ \left\{ \begin{aligned} \text{Case 1: } \omega_1 = \omega_3 = \omega_5 = \omega_7 = 1.0 \\ \text{Case 2: } \omega_1 = \omega_7 = 2.0, \omega_3 = \omega_5 = 1.5 \\ \text{Case 3: } \omega_1 = \omega_3 = \omega_5 = \omega_7 = \infty \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (10)}$$

式(9)を式(8)に代入し、かつ式(10)の諸値を用いてそれぞれの場合におけるたわみ y を求めれば図-4(b)に示すごとく結果となる。

3. ばりたわみ式

(1) ばりたわみ式の諸導 図-1(a)に示すごとく、点荷重 $P(x)$, M_A および M_B が作用する場合は階段状変断面ばりの両端 A, B における接線角を γ_A, γ_B とすれば、これらは式(7)に $x=0, l$ を代入することにより直ちに次式のごとく与えられる。

$$\gamma_A = \frac{l^3}{EI_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} \right)^3 q_n, \quad \gamma_B = \frac{l^3}{EI_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n\pi} \right)^3 q_n \quad \text{--- (11)}$$

式(11)に式(5)の q_n を代入し、演算の上整理すれば M_A, M_B に関する次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} M_A \cdot D_{AA} - M_B \cdot D_{AB} &= \frac{EI_0 \pi^3}{l^3} \gamma_A - l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left\{ p_n + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\omega_n}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, i) \right\} \\ -M_A \cdot D_{BA} + M_B \cdot D_{BB} &= \frac{EI_0 \pi^3}{l^3} \gamma_B - l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left\{ p_n + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\omega_n}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, i) \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (12)}$$

$$\therefore \therefore D_{AA} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{An}}{n^3}, \quad D_{AB} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{Bn}}{n^3}, \quad D_{BA} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} H_{An}, \quad D_{BB} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} H_{Bn}$$

階段状変断面ばりの部材回転角 R , 両端 A, B におけるたわみ角 θ_A, θ_B とすれば、これらと γ_A, γ_B との間には $\gamma_A = \theta_A - R, \gamma_B = \theta_B - R$ なる関係があるゆえ、このことを考慮して式(12)を連立に解き、端モーメント M_A, M_B を求めれば、階段状変断面ばりのたわみ曲線式が次のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= UK_0 \{ D_{BB} \theta_A + D_{AB} \theta_B - (D_{BB} + D_{AB}) R \} + C_{AB} \\ M_{BA} &= UK_0 \{ D_{BA} \theta_A + D_{AA} \theta_B - (D_{BA} + D_{AA}) R \} + C_{BA} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (13)}$$

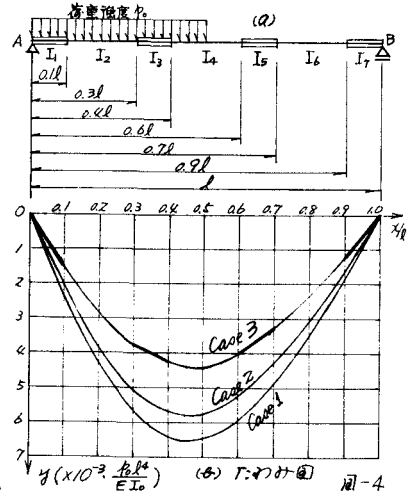
(ただし、係数 U と K_0 は $M_A = M_{AB}, M_B = M_{BA}$ と仮定する)

$$\therefore \therefore U = \pi^3 / (D_{AA} \cdot D_{BB} - D_{AB} \cdot D_{BA})$$

$$C_{AB} = \frac{-l^2}{D_{AA} D_{BB} - D_{AB} D_{BA}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \{ D_{BB} + (-1)^n D_{AB} \} \left\{ p_n + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\omega_n}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, i) \right\}$$

$$C_{BA} = \frac{-l^2}{D_{AA} D_{BB} - D_{AB} D_{BA}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \{ D_{BA} + (-1)^n D_{AA} \} \left\{ p_n + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\omega_n}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, i) \right\}$$

(2) 計算例 図-5(a)に示す一般四角型ラウメンの解法を示す。次のとおりである。図示のごとく



く、柱ははりとの結合受側において $0.2l$ の剛域をもち、また、はり端面においてそれぞれ $0.1l$ の剛域から $0.2l$ の変断面区間を挟むものとし、さらに、はりには等分布荷重が作用するものとする。かかるとき各部材のたわみ関式は式(13)より次のごとく表す。

$$M_{AB} = 0.8 \times (4.3970 q_0 + 9.4223 q_1)$$

$$M_{BA} = 0.8 \times (9.7066 q_0 + 14.1037 q_1)$$

$$M_{BC} = 12.8858 q_0 + 9.4540 q_1 - 0.08037 q_2 l^2$$

$$M_{CB} = 9.4540 q_0 + 12.8858 q_1 + 0.02544 q_2 l^2$$

$$V_{BC} = 0.8 \times (9.7066 q_1 + 14.1037 q_2)$$

$$M_{DC} = 0.8 \times (4.3970 q_1 + 9.4223 q_2)$$

$$\therefore (1) \quad q_0 = EK_0 \theta_0, \quad q_1 = EK_0 \theta_1, \quad q_2 = -EK_0 R$$

ラーメンの各部材方程式および円方程式に式(4)を代入してこれらの諸式を連立に与付け、 q_0, q_1 および q_2 が次のごとく求まる。

また、これらの諸値を用いて各梁のモーメントを算出の上図示すれば図-5(6)の結果となる。

$$q_0 = 0.00590 q_2 l^2 \quad (0.01031 q_2 l^2), \quad q_1 = -0.00355 q_2 l^2 \quad (-0.00572 q_2 l^2)$$

$$q_2 = -0.000705 q_2 l^2 \quad (-0.001149 q_2 l^2)$$

(ただし、() 内は剛域および変断面区間の同一様断面部材に対するラーメンの解であり、本題のラーメンの場合と比較対照した。)

4. 任意形状変断面はりの近似解法 図-6 に示すごとく、はりの断面が任意形状に変化する場合にはこれを厳密に解くことは一般的に不可能である。しかし、はり

りを適当に分割し、分割された各区間の断面を二次モーメントとしてその区間の平均断面に関する断面二次モーメントを用いれば、階段状変断面はりに置き換えられることとなり、はりのたわみ、たわみ角およびたわみ関式の近似解が求まる。

5. 粘結 本法は階段状変断面部材をもち骨組構造の厳密解法を与えるものであるが、2. の(3)および3. の(2)の計算例に示すごとく、本法では剛域の問題を $I = \infty$ の特例として取扱うことが出来るため極めて便利である。また、フーリエ級数を用いる本法は、板と骨組とを一体構造を解くための基礎理論となる奥村大助教授の著述をもちくものであり、本法の一特色である。

参考文献

- (1) 柳田 F. O. Ondra : Deflection and Slope of Beams with Varying I, Proc. A.S.C.E., ST1, Feb., 1963
- M. Hetenyi : Deflection of Beams of Varying Cross Section, Journal of Applied Mechanics, vol. 4, June, 1937.
- 各務一雄 : 断面が変化する材料有る梁の計算について, 建築雑誌 第45巻第550号 昭和6年10月
- 小野 龍 : 材料に剛性部分をもつ材からなるラーメンの解法について, 建築学会論文集 第24号 昭和17年3月
- (2) 山崎・榎本 : フーリエ級数による連続はりおよびラーメンの解法, 九州大工学集報 第39巻第3号 昭和41年10月
- (3) 山崎・榎本・今岡 : 両端に任意の境界条件をもつ連続はりおよびラーメンの解法, 九州大工学集報 第40巻第2号 昭和42年3月

