

大阪大学 正 員 前田 幸雄

大阪大学 学生員 ○藤本 一男

1. ま え が き 塑性設計法を構造物に適用するためのアーチの極限耐荷力に関する研究の一部として、アーチの断面に働く曲げモーメント、および軸力によって塑性崩壊を起す場合の解析を、2ヒンジアーチを対象として、円形、および放物線アーチ、対称・非対称の集中荷重、および等分布荷重の条件のもとに行ったものである。降伏条件を示す曲げモーメントと軸力の相関曲線を直線で近似して上界定理を用いて、円形アーチには矩形断面、放物線アーチには、上下2ヶの対称箱型断面について計算した結果を示した。

2. 理論式 材料は完全弾塑性体であり、座屈、疲労、脆性破壊等が生じないとして、曲げモーメント、および軸力のみを考慮する。

(1) 降伏条件式

矩形断面に対しては

$$m + n^2 = 1 \quad (1)$$

2ヶの対称箱型断面に対しては

$$m + n = 1 \quad (1')$$

ここで、 $m = \frac{M}{M_0}$, $n = \frac{N}{N_0}$, N_0, M_0 : 夫々単独で働く場合の降伏軸力、降伏曲げモーメント。

(2) 円形2ヒンジアーチの崩壊荷重算定式

対称荷重 (図-1, 図-3)

中央点における水平方向、および垂直方向の変位条件、および歪ベクトルと $m-n$ 相関曲線の直交条件から

$$\frac{\theta_1}{2\theta_2} = \frac{(1+h)\cos\phi_2 - \cos\phi_0}{1-h - \cos\phi_0} = \mu \quad (2)$$

塑性関節の生ずると予想される点、①、②における内部位争は

$$V_k = M_0 \{ (m_1\theta_1 + n_1\lambda_1) + (m_2\theta_2 + n_2\lambda_2) \} = 2M_0(\mu-1)\theta_2 \quad (3)$$

ここで、 θ_1, θ_2 は塑性関節における回転角、 λ_1, λ_2 は伸 α , $h = \frac{M_0}{2rN_0}$ である。

非対称荷重 (図-2, 図-4)

点Bにおける水平方向、および垂直方向の変位条件から

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = -\frac{(1+h)\cos\phi_2 - \cos\phi_0}{(1-h)\cos\phi_1 - \cos\phi_0} = \mu' \quad (4)$$

$$\gamma = \frac{-(1+h)\sin(\phi_0 - \phi_2) + (1-h)\sin(\phi_0 + \phi_1) - (1-h^2)\sin(\phi_1 + \phi_2)}{2\sin\phi_0 \{ (1-h)\cos\phi_1 - \cos\phi_0 \}} \theta_2$$

$$= \gamma\theta_2 \quad (5)$$

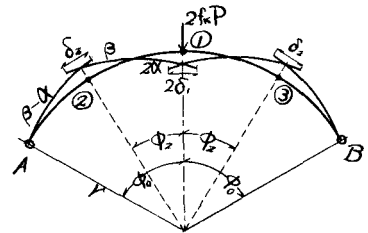


図 - 1

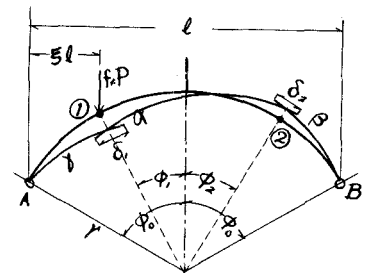


図 - 2

塑性関節が注すると予想される点、①、②における内部仕事は

$$W_k = M_0 \{ m \theta_1 + n \lambda_1 \} + \{ m_2 \theta_2 + n_2 \lambda_2 \} = M_0 (\mu' - 1) \theta_2 \quad (6)$$

(a) 対称集中荷重 (図 - 1)

外部仕事

$$W_e = -2 f_k P r \frac{-(1-h) \sin \phi_0 + (1-h') \sin \phi_2 + (1+h) \sin (\phi_0 - \phi_2)}{1-h - \cos \phi_0} \theta_2 \quad (7)$$

式(3)=式(7)から

$$f_k P = \frac{1-h - 2 \cos \phi_0 + (1+h) \cos \phi_2}{(1+h) \sin (\phi_0 - \phi_2) + (1-h') \sin \phi_2 - (1-h) \sin \phi_0} \frac{M_0}{r} \quad (8)$$

(b)、非対称集中荷重 (図 - 2)

外部仕事

$$W_e = f_k P \left\{ \nu (\sin \phi_0 - \sin \phi_1) + \frac{1}{2} h' \mu' \sin \phi_1 \right\} r \theta_2 \quad (9)$$

式(6)=式(9)から

$$f_k P = \frac{\mu' - 1}{\nu (\sin \phi_0 - \sin \phi_1) + \frac{1}{2} h' \mu' \sin \phi_1} \frac{M_0}{r} \quad (10)$$

(c)、対称等分布荷重 (図 - 3)

$|\phi_1| \leq |\phi_2|$ の場合

$$f_k W = 2 \left\{ (\sin \phi_0 - \sin \phi_1) \mu + \sin \phi_0 - (2-h) \sin \phi_1 + \frac{1}{2} \sin \phi_0 \right\} \sin \phi_1 \}^{-1} \cdot (\mu - 1) \frac{M_0}{r} \quad (11)$$

$|\phi_1| \geq |\phi_2|$ の場合

$$f_k W = 2 \left\{ \sin \phi_0 - \frac{1}{2} \sin \phi_0 - (1-h) \sin \phi_1 \right\} (\sin \phi_0 - \sin \phi_1) (\mu + 1) + \sin \phi_1 \left\{ (\sin \phi_0 - \sin \phi_1) (\mu + 1) - \frac{1}{2} \sin \phi_0 \right\} \}^{-1} \cdot (\mu - 1) \frac{M_0}{r} \quad (12)$$

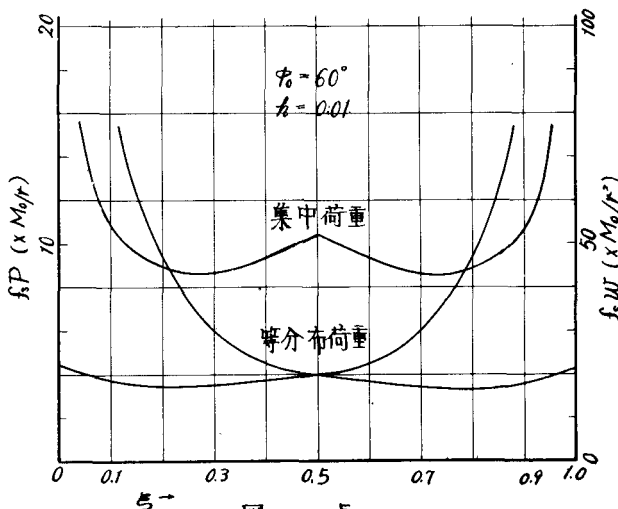


図 - 5

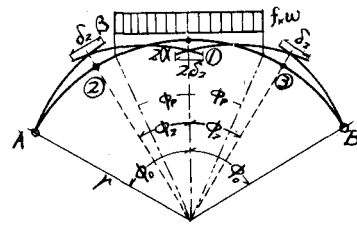


図 - 3

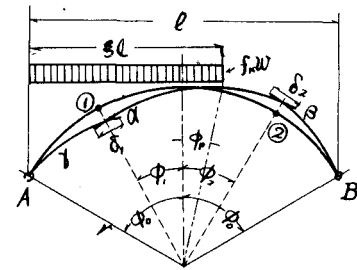


図 - 4

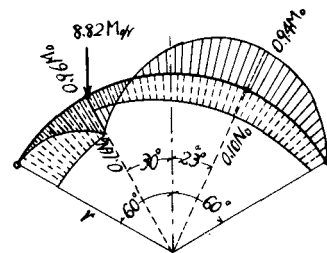


図 - 6

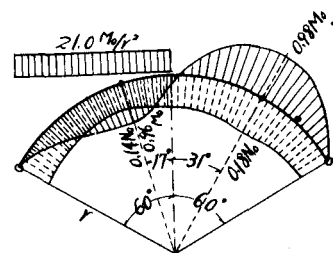


図 - 7

(d) 非対称等分布荷重 (図-4)

$|\phi| \geq |\phi|$ の場合

$$f_k W = \left[\frac{1}{2} (\sin \phi_0 - \sin \phi_p)^2 \nu \right]^{-1} (\mu' - 1) \frac{M_0}{\gamma^2} \quad (13)$$

$|\phi| \leq |\phi|, |\phi| \leq |\phi|$ の場合

$$f_k W = \left[\left\{ \frac{1}{2} (\sin \phi_0 + \sin \phi_p) + \sin \phi_p \right\} \left\{ \nu (\sin \phi_0 - \sin \phi_p) + \mu' h \sin \phi_p \right\} - \frac{1}{2} \mu' (\sin \phi_p + \sin \phi_0)^2 \right]^{-1} (\mu' - 1) \frac{M_0}{\gamma^2} \quad (14)$$

$|\phi| \geq |\phi|$ の場合

$$f_k W = \left[\nu (\sin \phi_0 - \sin \phi_p) (\sin \phi_0 + \sin \phi_p) + \mu' h \sin \phi_p (\sin \phi_0 + \sin \phi_p) - \mu' (\sin \phi_p + \sin \phi_0) \left\{ \frac{1}{2} (\sin \phi_p - \sin \phi_0) + \sin \phi_p \right\} + \frac{1}{2} (\sin \phi_p - \sin \phi_0)^2 \right]^{-1} (\mu' - 1) \frac{M_0}{\gamma^2} \quad (15)$$

以上の上界を与える式から、最小の f_k を与える ϕ を $\frac{\partial f_k}{\partial \phi} = 0$, $\frac{\partial f_k}{\partial \phi_0} = 0$ から求めるならば、真の崩壊荷重, $f_k P$, $f_k W$ を求めることができる。計算は $\frac{\partial f_k}{\partial \phi} = 0$, $\frac{\partial f_k}{\partial \phi_0} = 0$ を解くより試行的に求める方が容易である。今、 $h = 0.01$, $\phi_0 = 60^\circ$ の場合について計算結果を示すと図-5の如くであり、そのときの応力分布は、図-6, 図-7の如くである。

(3) 旋物線形 2 ヒンジアーチの崩壊荷重算定式

等分布荷重を対象として、対称、および非対称の算定式を示す。

(a) 対称載荷 (図-8)

荷重下 W が拱頂から左右対称に $(0.5 - \xi)l$ の長さで分布しているとするば、

降伏条件 (1)', 拱頂点の変位の条件から

$$\theta_2 = - \frac{\frac{1}{2} (k + \varepsilon h_1)}{k + \varepsilon h_2 \cos \phi - \{1 - 4\xi_2(1 - \xi_2)\}k} \theta_1 = \beta \theta_1 \quad (16)$$

$$\beta = - \theta_2 - \frac{1}{2} \theta_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{k + \varepsilon h_1}{k + \varepsilon h_2 \cos \phi - \{1 - 4\xi_2(1 - \xi_2)\}k} - 1 \right\} \theta_1 = \rho \theta_1 \quad (17)$$

$$\text{ここで, } \theta_1 = \alpha, \quad \theta_2 = -\beta, \quad h = \frac{M_0}{\ell N_0}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad k = \frac{f}{\ell}$$

内部仕事

$$W_i = 2M_0(n\theta_2 + n\lambda_2) + M_0(n\theta_1 + n\lambda_1) = (-2M_0\beta + M_0) \theta_1 \quad (18)$$

ここで、添番号, λ は大々塑性関節 ① と ② に関するもの, $\lambda = 2n\theta$,

外部仕事

$\frac{1}{2} \geq \xi \geq \xi_2$ の場合

$$W_e = \frac{1}{2} F W \ell^2 \{ (0.5 - \xi + \xi)(0.5 - \xi) + \{1 - 8\xi(1 - \xi) + 4\xi(1 - \xi)\} \{1 - 4\xi(1 - \xi)\} k^2 \} \times \frac{1}{2} \theta_1 \quad (19)$$

$\xi_2 \geq \xi \geq 0$ の場合

$$W_e = \frac{1}{2} F W \ell^2 \{ (0.5 - \xi_2)(0.5 - \xi_2 + \xi_2) + \{1 - 8\xi(1 - \xi) + 4\xi_2(1 - \xi_2)\} \{1 - 4\xi_2(1 - \xi_2)\} k^2 \} \theta_1 - F W \ell^2 \{ (1 - \xi_2^2) + 16k^2 \{ \xi_2(1 - \xi_2) + \xi(1 - \xi) \} \{ \xi_2(1 - \xi_2) - \xi(1 - \xi) \} \} \rho \theta_1 \quad (20)$$

ξ の位置に応じて、内部仕事と外部仕事を等値して、 $F W$ も最小ならしめる $\xi_2 \ell$ の値を知ることにより、最小崩壊荷重を求め得る。

(b) 非対称載荷 (図-9)

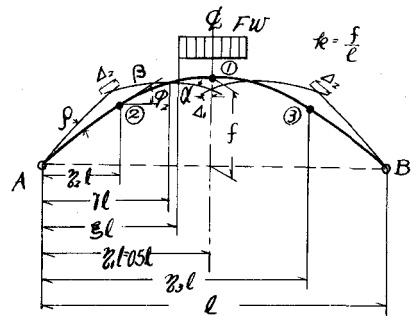


図-8

荷重 Fw が起拱点 A から ξl の長さで分布しているとす

る (図-9)

降伏条件式 (1)', 起拱点の変位の条件から

$$\theta_2 = -\frac{4R\xi_1(1-\xi_1) + \varepsilon_1 h_1 \cos\phi_1}{4R\xi_2(1-\xi_2) + \varepsilon_2 h_2 \cos\phi_2} \theta_1 = p\theta_1 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta = & \left\{ (1-\xi_1) + \varepsilon_1 h_1 \sin\phi_1 \right\} \left\{ 4R\xi_2(1-\xi_2) + \varepsilon_2 h_2 \cos\phi_2 \right\} \\ & - \left\{ (1-\xi_2) - \varepsilon_2 h_2 \sin\phi_2 \right\} \left\{ 4R\xi_1(1-\xi_1) + \varepsilon_1 h_1 \cos\phi_1 \right\} \\ & \times \left\{ 4R\xi_2(1-\xi_2) + \varepsilon_2 h_2 \cos\phi_2 \right\}^{-1} \cdot \theta_1 = \delta \theta_1 \quad (22) \end{aligned}$$

ここで $\theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = -\beta$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$

$$\text{内部仕事} \quad W_i = (M_{\theta_1} - pM_{\theta_2}) \theta_1 \quad (23)$$

外部仕事

$$\xi_1 \leq \xi_2 \leq 0 \text{ の場合} \quad W_e = \frac{1}{2} Fw l^2 \{ 1 + 16k^2(1-\xi_1)^2 \} \delta \theta_1 \quad (24)$$

$\xi_1 \geq \xi_2 \geq \xi_1$ の場合

$$\begin{aligned} W_e = & \frac{1}{2} Fw l^2 \left[\{ 1 + 16k^2(1-\xi_1)^2 \} \xi_1^2 \xi_2 + \{ (2\xi_1 - \xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_1) + 16k^2 \{ 2\xi_1(1-\xi_1) - \xi_1(1-\xi_2) \} \right. \\ & \left. \times \{ \xi_2(1-\xi_2) - \xi_1(1-\xi_1) \} \} (1-\xi_1) \right] \theta_1 \quad (25) \end{aligned}$$

$1 \geq \xi_1 \geq \xi_2$ の場合

$$\begin{aligned} W_e = & \frac{1}{2} Fw l^2 \left[\{ 1 + 16k^2(1-\xi_1)^2 \} \xi_1^2 \xi_2 + \{ (2\xi_1 - \xi_2 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_2) + 16k^2 \{ 2\xi_1(1-\xi_1) - \xi_2(1-\xi_2) \} \right. \\ & \left. \times \{ \xi_2(1-\xi_2) - \xi_1(1-\xi_1) \} \} (1-\xi_1) - \{ (1 + 16k^2\xi_1^2)(1-\xi_2)^2 - (1 + 16k^2\xi_2^2)(1-\xi_1)^2 \} (\xi_1 - p - 1) \right] \theta_1 \quad (26) \end{aligned}$$

ξ_1 の位置に応じて、内部仕事と外部仕事を等値して、 Fw を最小にする (ある $\xi_1 l$, $\xi_2 l$ の値を知ることにより最小崩壊荷重を求め得る。

[計算例]

$\frac{1}{2} = 0.245l$, 死荷重 $= 1.27 \text{ t/m}$, 箱型対称弦状断面をもつ鋼構拱橋について計算した例を示すと図-10の如くである。

[参考文献]

P. G. Hodge, "Plastic Analysis of Structures," 1959 p.182

C. E. Massonnet, M. A. Save "Plastic Analysis and Design", Vol.1 1965 p.310

Y. Maeda "Ultimate Strength Analysis of Two-Hinged Braced-Rib Steel Arch Bridge,"

大阪大学工学報告 17 巻 1 号
1967

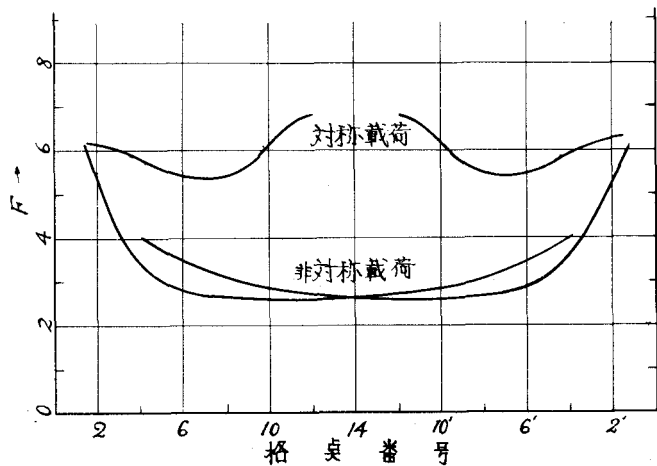


図 - 10