

東京大学工学部 正員

奥村敏恵

桜田機械工業KK 正員

○鈴木康弘

薄肉断面材ではダイアフラム、トラスなどの横方向補剛材を入れることによって断面形状を保持させているが、この補剛材がうける応力、および補剛材が桁本体に及ぼす効果を調べるにはまず断面変形を考慮した場合の応力、変位が解かれねばならない。従来の薄肉梁に関する曲げ捩れ理論などでは断面形状は不変という大前提を含んでいるためこれに差づくことはできない。断面変形を考慮した薄肉梁の解法としてはいわゆる折板構造理論があるが、その理論上の仮定を力学的モデルで示すと図-1 のようになる。従来の研究ではこれを高次の不静定構造と考へ、未知不静定力（横剪断力と横撓弯モーメント）を未知数とする基本方程式を立てているが、境界条件の導入等に不便があるので、本研究では断面の変位、変形を規定する独立な変位成分を未知数とする基本方程式を導くことを試みた。また従来の理論では St. Venant の捩れ抵抗が含まれていないが、ここではこれを考慮した。計算はエネルギー法によつて、内部歪エネルギー V および外力のポテンシャルエネルギー U の算定

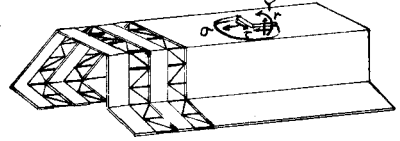


図1. Orthotropic Three Dimensional System.

図-2 に示すような m 個の平板の連なりからなる断面を取り扱う。 U, V を独立な変位成分 すなわち図-3 に示すような変位成分のうちの各板の面内変位 z_i ($i=1, 2, \dots, m$) および種の回転角 φ_i ($i=1, 2, \dots, m-1$) であらわす。まず V は $V = V_1 + V_2 + V_3$ の3つの部分に分けて考える。

V_1 は各板の桁作用（簡略化した板作用）による歪エネルギーで、各板の内部では歪が直線分布をすること、横で両側の板の歪が等しいという条件を用いると

$$V_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^m R_{ii} z_i'^2 dz + \frac{E}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{(i \neq j)} Z R_{ij} z_i' z_j' dz + \frac{E}{2} \int_0^L F \varepsilon^2 dz$$

ここで ε は全断面で平均化された歪で

$$\varepsilon = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^m F_i \varepsilon_i \quad F = \sum_{i=1}^m F_i$$

また $R_{ii} = I_i + \sum_{j=1}^m F_j A_j^2$ $R_{ij} = \sum_{j=1}^m F_j A_j A_{ji}$ ($i \neq j$)

F_i, I_i : 各板の断面積 および 弾軸まわりの断面二次モーメント

$$A_{ij} = \begin{cases} a_j + c_{ij} & (i \leq j) \\ a_j & (j > i) \end{cases} \quad a_i = -\frac{E_i}{F} (F - F_i), \quad a_j = -\frac{1}{F} (G_{ji} F_j + a_j \sum_{j=1}^m F_j)$$

$i=1, c_{11}=0$; $i=2, c_{21}=c_1, c_{22}=c_2$; $i \geq 3, c_{i1}=c_{i1}, c_{ij}=a_j, c_{ii}=c_{i,i-1}$

V_2 は横方向ラーメン（簡略化した板作用）による歪エネルギーで

$$V_2 = \int_0^L \sum_{i=2}^m \frac{D_i}{2} \{ \varphi_{i-1}^2 + \varphi_{i-1} \varphi_i + \varphi_i^2 - 3 \varphi_{i-1} (\varphi_{i-1} + \varphi_i) + 3 \varphi_i^2 \} dz$$

ここで $D_i = E_i t_i^3 / 12(1-\nu^2)$, $\varphi_i = \frac{1}{t_i} \left\{ \frac{z_{i-1}}{\sin \varphi_{i-1}} - z_i (\cot \varphi_{i-1} + \cot \varphi_i) + \frac{z_i}{\sin \varphi_i} \right\}$

V_3 は St. Venant の捩れによる歪エネルギーで

$$V_3 = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=2}^m G_i J_i \varphi_i'^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L (G_i J_i \varphi_i'^2 + G_{i+1} J_{i+1} \varphi_{i+1}'^2) dz$$

次に外力のポテンシャルエネルギーは図-4 に示すような P_i^0, Y_i^0, T_i^0 なる外力を考へると

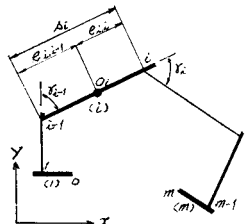


図2. 断面図.

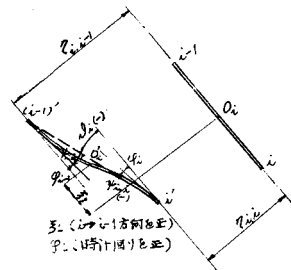


図3. 変位.

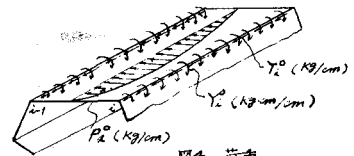


図4. 荷重

$$U = - \int_0^L \sum_{i=1}^m P_i^0 z_i dz - \int_0^L \sum_{i=1}^m Y_i^0 \varphi_i dz - \int_0^L \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m A_{ij}^* z_j^* + \varepsilon \right) T_i^0 dz$$

ここで $A_{ij}^* = A_{ij}^*(\lambda_i, \lambda_j) = A_{ij} + C_{i,j} (\lambda_i = \lambda_j) ; A_{ij}^* = A_{ij} - C_{i,j} (\lambda_i \neq \lambda_j) = A_{ij} (j \neq i+1)$

以上で全系のポテンシャルエネルギー $\Pi = V_1 + V_2 + V_3 + U$ が z_i, φ_i で表わされたので これを変分することによって釣り合い方程式が成る。その結果は状態における境界条件が自然境界条件をみたす時

$$\sum_{j=1}^m E R_{ij} z_j^{*'} - (a_{i,i-2} z_{i-2}^* + a_{i,i-1} z_{i-1}^* + a_{i,i} z_i^* + a_{i,i+1} z_{i+1}^* + a_{i,i+2} z_{i+2}^*) + (b_{i,i-2} z_{i-2}^* + b_{i,i-1} z_{i-1}^* + b_{i,i} z_i^* + b_{i,i+1} z_{i+1}^* + b_{i,i+2} z_{i+2}^*) + (c_{i,i-2} \varphi_{i-2} + c_{i,i-1} \varphi_{i-1} + c_{i,i} \varphi_i + c_{i,i+1} \varphi_{i+1}) = P_i^0 - \sum_{j=1}^m A_{ji}^* T_j^0$$

$$g_{i,i-1} \varphi_{i-1} + g_{i,i} \varphi_i + g_{i,i+1} \varphi_{i+1} + (h_{i,i-2} z_{i-2}^* + h_{i,i-1} z_{i-1}^* + h_{i,i} z_i^* + h_{i,i+2} z_{i+2}^*) - \left\{ \begin{matrix} GJ_i \varphi_i' & (i=1) \\ GJ_m \varphi_m' & (i=m+1) \end{matrix} \right\} = Y_i^0$$

$$EFE = - \sum_{i=0}^m T_i^0$$

に於て、ここで

$$\left. \begin{aligned} a_{i,i-2} &= \frac{GJ_{i-1}}{\Delta_{i-1}^2} \cdot \frac{1}{\sin \delta_{i-1} \sin \delta_{i-2}} \\ a_{i,i-1} &= - \left(\frac{GJ_{i-1}}{\Delta_{i-1}^2} \cdot \frac{\cot \delta_{i-2} + \cot \delta_{i-1}}{\sin \delta_{i-1}} + \frac{GJ_i}{\Delta_i^2} \cdot \frac{\cot \delta_{i-1} + \cot \delta_i}{\sin \delta_{i-1}} \right) \\ a_{i,i} &= \frac{GJ_{i-1}}{\Delta_{i-1}^2} \cdot \frac{1}{\sin \delta_{i-1}} + \frac{GJ_i}{\Delta_i^2} (\cot \delta_{i-1} + \cot \delta_i) + \frac{GJ_{i+1}}{\Delta_{i+1}^2} \cdot \frac{1}{\sin \delta_{i+1}} \\ a_{i,i+1} &= - \left(\frac{GJ_i}{\Delta_i^2} \cdot \frac{\cot \delta_{i-1} + \cot \delta_i}{\sin \delta_i} + \frac{GJ_{i+1}}{\Delta_{i+1}^2} \cdot \frac{\cot \delta_i + \cot \delta_{i+1}}{\sin \delta_i} \right) \\ a_{i,i+2} &= \frac{GJ_{i+1}}{\Delta_{i+1}^2} \cdot \frac{1}{\sin \delta_{i+1} \sin \delta_{i+2}} \end{aligned} \right\}$$

$b_{i,i-2} \dots b_{i,i+2}$ は $a_{i,i-2} \dots a_{i,i+2}$ の中の係数
 GJ_i/Δ_i^2 と それぞれ $12D_i/\Delta_i^3$ とおきかえらるものである
 a, b, c, g, h の計算中 J, J_m, D, D_m は
 セロとする。

$$\left. \begin{aligned} C_{i,i-2} &= \frac{6D_{i-1}}{\Delta_{i-1}^3} \cdot \frac{1}{\sin \delta_{i-1}} \\ C_{i,i-1} &= \frac{6D_{i-1}}{\Delta_{i-1}^3} \cdot \frac{1}{\sin \delta_{i-1}} - \frac{6D_i}{\Delta_i^3} (\cot \delta_{i-1} + \cot \delta_i) \\ C_{i,i} &= - \frac{6D_i}{\Delta_i^3} (\cot \delta_{i-1} + \cot \delta_i) + \frac{6D_{i+1}}{\Delta_{i+1}^3} \cdot \frac{1}{\sin \delta_{i+1}} \\ C_{i,i+1} &= \frac{6D_{i+1}}{\Delta_{i+1}^3} \cdot \frac{1}{\sin \delta_{i+1}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} h_{i,i-1} &= \frac{6D_i}{\Delta_i^3} \cdot \frac{1}{\sin \delta_{i-1}} \\ h_{i,i} &= \frac{6D_{i-1}}{\Delta_{i-1}^3} \cdot \frac{1}{\sin \delta_i} - \frac{6D_i}{\Delta_i^3} (\cot \delta_{i-1} + \cot \delta_i) \\ h_{i,i+1} &= \frac{6D_i}{\Delta_i^3} \cdot \frac{1}{\sin \delta_i} - \frac{6D_{i+1}}{\Delta_{i+1}^3} (\cot \delta_i + \cot \delta_{i+1}) \\ h_{i,i+2} &= \frac{6D_{i+1}}{\Delta_{i+1}^3} \cdot \frac{1}{\sin \delta_{i+1} \sin \delta_{i+2}} \end{aligned} \right\}$$

$$g_{i,i-1} = 2D_i/\Delta_i, \quad g_{i,i} = 4(D_i/\Delta_i + D_{i+1}/\Delta_{i+1}), \quad g_{i,i+1} = 2D_{i+1}/\Delta_{i+1},$$

以上 z_i と φ_i についての連立微分方程式を解けば 慣用の梁、ラ－メンの力学から

$$\sigma_i = \frac{M_i}{I_i}, \quad M_i = EI_i z_i''$$

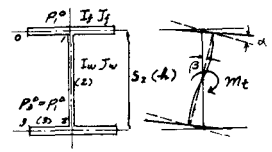
$$\left. \begin{aligned} Y_{i-1} &= \frac{2D_i}{\Delta_i} (2\varphi_{i-1} - \varphi_i) \\ Y_i &= \frac{2D_i}{\Delta_i} (\varphi_{i-1} - 2\varphi_i) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \varphi_{i-1} &= \varphi_i - \alpha_i \\ \varphi_i &= -(\varphi_i - \alpha_i) \end{aligned} \right\}$$

などから応力(又は内力)が求まる。実際の計算にはフーリエ級数解によるのが適当である

応用例

最も簡単な例として右図のような2軸対称断面に適用すると

$$\left. \begin{aligned} EI_1 z_1^{IV} - \frac{24GJ_2}{\Delta_2^2} z_1''' + \frac{24D_2}{\Delta_2^2} z_1'' + \frac{12D_2}{\Delta_2^3} \varphi_1 &= P_1^0 \\ EI_2 + 2F_1 \left(\frac{\Delta_2}{2} \right) z_2^{IV} &= P_2^0 \quad (\text{梁の間が王座) 角の式} \\ \frac{12D_2}{\Delta_2^3} z_1 - GJ_2 \varphi_1' + \frac{6D_2}{\Delta_2} \varphi_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$



$\Delta_2 = h, I_1 = I_f, J_1 = J_f, J_2 = J_w, z_1 = \frac{h}{2} \beta, \varphi_1 = \beta - \alpha, P_1^0 = m_t/h$ とおきかえたとす1,3式は

$$\left. \begin{aligned} EI_f \frac{h^3}{2} \beta^{IV} - GJ_w \beta''' + \frac{24D_w}{h} \beta'' + \frac{12D_w}{h} \alpha &= m_t \\ \frac{6D_w}{h} \alpha - GJ_f (\beta' - \alpha') &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ここで $EI_f \frac{h^3}{2}$ は $ECbd$ になっていて 上の式は Goodier の導いた式に一致する

その他 漸断面を台形断面についての若干の計算例を行ったが 断面の都合上省略する。当日研究会があれば発表したい。

*) "The Effect of Web Deformation on the Torsion of I-Beams" Goodier & Barton, Jour. of App. Mech. 1944, March P.35