

緒言 連続斜板の解析に関する既往の研究として、直交座標による解式に基づき、節線上の不静定モーメントの分布を矩形に分割近似して取扱った岡村氏⁽¹⁾のものが見受けられるが、本研究は、単一斜板の *Stiffness Matrix* を斜交座標に基づいて誘導したうえでいわゆる *Finite Element Method* を用いる、任意境界条件を有する一方向連続斜板の解法を述べたものである。

1. 基礎微分方程式および断面力

直交座標に基づく等方性板のたわみ曲面の微分方程式は、周知のごとく次式で表される。

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad (1)$$

ここに D : 板剛度, q : 荷重強度

いま図-1のごとく、平行四辺形板の2辺に沿って斜交座標 x, y を、またこれら面軸に垂直下向きに z 軸をとり、直交座標から斜交座標への変換公式⁽²⁾を用いれば、式(1)は次のごとく斜交座標表示される。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 4s_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1+2s_0^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 4s_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = c_0^2 \frac{q}{D} \quad (2)$$

ただし $c_0 = \cos \varphi$, $s_0 = \sin \varphi$

また、板に作用する応力方向を図-1(a)のごとく定め、板厚をもとして断面に作用するモーメントを $M_x = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz$, $M_y = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y dz$, $M_{xy} = -M_{yx} = -\int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{xy} dz$ で定義すれば、結局これは次式で表わされることとなる⁽³⁾。

$$\begin{aligned} M_x &= -D \frac{1}{c_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (s_0^2 + \nu c_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2s_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \\ M_y &= -D \frac{1}{c_0^2} \left\{ (s_0^2 + \nu c_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2s_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \\ M_{xy} &= -D \frac{1}{c_0^2} \left\{ 2s_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2s_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (1+s_0^2 - \nu c_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに ν : ポアソン比

2. 平行四辺形板要素の *Stiffness Matrix*

板要素 (element) の *Stiffness Matrix* の誘導には、R. J. Melosh⁽⁴⁾, O. C. Zienkiewicz⁽⁵⁾ および J. H. Argyris⁽⁶⁾ の発表した手法があるが、本研究では、直交座標に対して O. C. Zienkiewicz が用いた手法を斜交座標に拡張応用し、かつ長さの dimension をもつ諸量をすべて無次元化して演算の簡易化をはかった。

図-2のごとく、相隣る2辺の長さがそれぞれ a, b なる平行四辺形 element A の中立面内に図-1にならって斜交座標軸 x, y およびこれらに垂直下向きの z 軸をとり、 x および y を無次元化して $x/a = \xi$, $y/b = \eta$ とおく。さらに z 軸方向のたわみ w の無次元量を $w/l = \omega$ (l は長さの

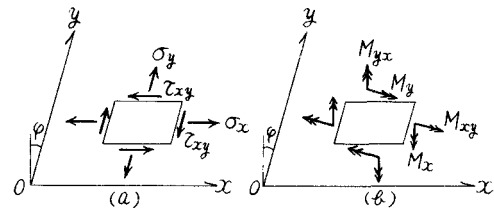


図-1

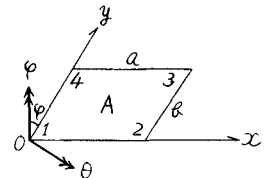


図-2

dimension をもつ任意量) とし、 ω が式 (2) の齊次方程式を満足する次の 4 次式で表わされるものとする。すなわち

$$\omega = A_1 + A_2\xi + A_3\eta + A_4\xi^2 + A_5\xi\eta + A_6\eta^2 + A_7\xi^3 + A_8\xi^2\eta + A_9\xi\eta^2 + A_{10}\eta^3 + A_{11}(\xi^3\eta + 2\xi^2\eta^2) + A_{12}(\xi\eta^3 + 2\xi^2\eta^2) \quad (4)$$

$$\text{ただし } \nu_1 = \frac{3J_0}{1+2J_0^2} \frac{a}{\delta}, \quad \nu_2 = \frac{3J_0}{1+2J_0^2} \frac{a}{\delta}$$

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$ は無次元係数

次に、前節のモーメント M_x, M_y に対応するたわみ角を $\theta = -\frac{\partial w}{\partial y}$, $\varphi = \frac{\partial w}{\partial x}$ で定義すれば、これらは上記の無次元諸量で次のごとく表わされる。

$$\theta = -\mu \frac{\partial w}{\partial y} = -\mu \{ A_3 + A_5\xi + 2A_6\eta + A_8\xi^2 + 2A_9\xi\eta + 3A_{10}\eta^2 + A_{11}(\xi^3 + 2\xi^2\eta) + A_{12}(3\xi\eta^2 + 2\xi^2\eta^2) \} \quad (5)$$

$$\varphi = \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = \lambda \{ A_2 + 2A_4\xi + A_5\eta + 3A_7\xi^2 + 2A_8\xi\eta + A_9\eta^2 + A_{11}(3\xi^2 + 2\xi\eta) + A_{12}(\eta^2 + 2\xi\eta^2) \}$$

$$\text{ここに } \lambda = l/a, \quad \mu = l/b$$

いま element A の任意の隅角部 (node) i 点 ($i=1, 2, 3, 4$) の変形成分を 3 次の列ベクトル

$$u_i = \{ \theta \quad \varphi \quad \omega \} \quad (6)$$

で表わし、element A の 4 個の node の変形成分を 12 次の列ベクトル

$$U^A = \{ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \} \quad (7)$$

で表わせば、式 (4), (5) の ξ, η に各 node の座標 (ξ_i, η_i) を代入することにより次式をうる。

$$U^A = CA \quad (8)$$

$$\text{または } A = C^{-1}U^A \quad (9)$$

ここに C は (12×12) 行列、 A は式 (4) の 12 個の係数の列ベクトルである。

他方、式 (6) の変形成分に対応する node i 点の外力を、モーメント M_θ, M_φ および z 軸方向の力 P により、3 次の列ベクトル

$$F_i = \{ M_\theta \quad M_\varphi \quad Pl \} \quad (10)$$

で表わし、element A の全体についても、式 (7) と同じく 12 次の列ベクトル

$$F^A = \{ F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \} \quad (11)$$

にて表わせば、 (12×12) の Stiffness Matrix K^A を媒介にして一般に次式が成立する。

$$F^A = K^A U^A \quad (12)$$

さて、式 (3) より与えられる任意点のモーメントを行列表示すれば次式をうる。

$$M = DG\delta \quad (13)$$

ここに $M = \{ M_x \quad M_y \quad M_{xy} \}$ は 3 次の列ベクトルであり、 G は (3×3) 行列で次の内容をもつ。

$$G = \frac{1}{C^2} \begin{bmatrix} 1 & (J_0^2 + \nu C^2) & J_0 \\ (J_0^2 + \nu C^2) & 1 & J_0 \\ J_0 & J_0 & \frac{1}{2}(1 + J_0^2 - \nu C^2) \end{bmatrix} \quad (14)$$

また 3 次の列ベクトル $\delta = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}$ は式 (4) より、次式のごとく行列表示される。

$$\delta = \frac{2l}{a\delta} BA = \frac{2l}{a\delta} BC^{-1}U^A \quad (15)$$

$$\text{ここに } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -p & 0 & 0 & -3p\xi & -p\eta & 0 & 0 & -p(3\xi\eta + 2\eta^2) & -p2\xi^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p^1 & 0 & 0 & -p^1\xi & -3p^1\eta & -p^12\xi^2 & -p^1(3\xi\eta + 2\xi^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\xi & 2\eta & 0 & 3\xi^2 + 42\xi\eta & 3\eta^2 + 42\xi\eta \end{bmatrix} \quad \text{ただし } p = \frac{a}{\delta} \quad (16)$$

element A の Stiffness Matrix K^A を算定するには、既に直交座標に関して用いられた仮想仕事法³⁾を本研究の斜交座標に対してもそのまま適用することができる。すなわち、仮想変位 δu^A に対して外力および内力の仕事とそれぞれ算定すれば

$$\text{外力の仕事: } W_e = (\delta u^A)^T F^A, \quad \text{内力の仕事: } W_i = \int_0^a \int_0^b (\delta r)^T M dx dz$$

$$\text{ここに、式(13), (15) より } M = \frac{2\theta}{a\delta} D G B C^T u^A, \quad \delta r = \frac{2\theta}{a\delta} B C^T \delta u^A$$

いま δu^A を identity matrix I にとれば

$$W_e = I F^A = F^A, \quad W_i = \frac{4\theta^2}{a\delta} D \int_0^a \int_0^b (B C^T)^T G B C^T u^A d\xi d\eta = [4\lambda \mu D (C^T)^T \left\{ \int_0^a \int_0^b B^T G B d\xi d\eta \right\} C^T] u^A$$

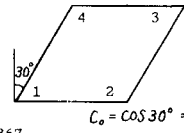
$$W_e = W_i \text{ より } F^A = K^A u^A$$

よって上式より所要の K^A は 結局次式にて与えられることとなる。

$$K^A = 4\lambda \mu D (C^T)^T \left\{ \int_0^a \int_0^b B^T G B d\xi d\eta \right\} C^T \quad (17)$$

$\lambda = \mu = .1$, $\nu = 0.2$ として $\varphi = 30^\circ$ の場合の K^A を算定した結果を示せば下記のごとくである。

$$K^A = \frac{4D}{a^2} \begin{bmatrix} .2150 & & & & & & & & & & \\ .0083 & .2150 & & & & & & & & & \\ -.4550 & .4550 & 2.4367 & & & & & & & & \\ .0433 & .0083 & -.0783 & .6983 & & & & & & & \\ -.0917 & .1983 & .8217 & .3083 & .6983 & & & & & & \\ -.0450 & -.3550 & -.9367 & -.9217 & -.9217 & 2.4367 & & & & & \\ .0433 & -.0250 & -.1450 & .1983 & .0083 & -.3550 & .2150 & & & & \\ -.0250 & .0433 & .1450 & -.0917 & .0433 & -.0450 & .0083 & .2150 & & & \\ .1450 & -.1450 & -.5633 & .8217 & -.0783 & -.9367 & .4550 & -.4550 & 2.4367 & & \\ .1983 & -.0917 & -.8217 & .0600 & -.1250 & -.1783 & .0433 & .0083 & .0783 & .6983 & \\ .0083 & .0433 & .0783 & -.1250 & .0600 & -.1783 & -.0917 & .1983 & -.8217 & .3083 & .6983 \\ .3550 & .0450 & -.9367 & .1783 & .1783 & -.5633 & .0450 & .3550 & -.9367 & .9217 & .9217 & 2.4367 \end{bmatrix} \quad \text{Symmetric} \quad (18)$$



3. 一方向連続斜板の解法

図-3のごとく、一対辺が自由、単純支持あるいは固定など任意の支持条件をもち、面端辺および中間節線が単純支持された一方向連続斜板を解く場合、分割

element の各節点に作用する外力（支点反力を含む）および変形成分をそれぞれ N , u で表わせば、各節点ごとに立てた x , y , z 方向の力の釣合式は次式にて一般表示される。

$$N = S u \quad (19)$$

ここに、全節点を n とすれば N , u はそれぞれ $3n$ 次の列ベクトル、 S は $(3n \times 3n)$ 行列である。しかるに端辺および中間節線上では $\omega = \theta = 0$, 一対辺が単純支持される場合は $\omega = \varphi = 0$, 一対辺が固定の場合は $\omega = \theta = \varphi = 0$ などがそれぞれ境界条件として成立するゆえ、これらの境界条件に応じて式(19)の未知数 u の個数は大巾に減少し、 S の次数も低下する。

式(19)を解いて各節点の未知変形成分 u が求まれば、任意点のモーメントは式(13)および式(15)より次式で与えられることとなる。

$$M = \frac{2\theta}{a\delta} D G B C^T u^A \quad (20)$$

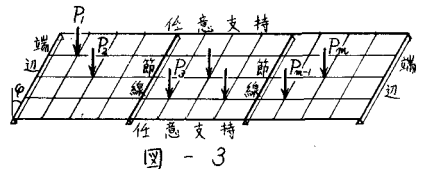


図-3

4. 計算例

斜角 $\varphi = 30^\circ$ で一辺が単純支持された2スパン方向連続斜板を 4×8 の element に分割し、式(18)の Stiffness Matrix を用いて、対称集中荷重に対するたわみ曲面を算定した結果を図-4(a)、4(b)、4(c) に示した。図-4(a)のごとき載荷状態の連続矩形板では中間節線上のたわみ角は明らかに0となるが、本例においては斜角の影響により左右逆対称のたわみ角が生じている。

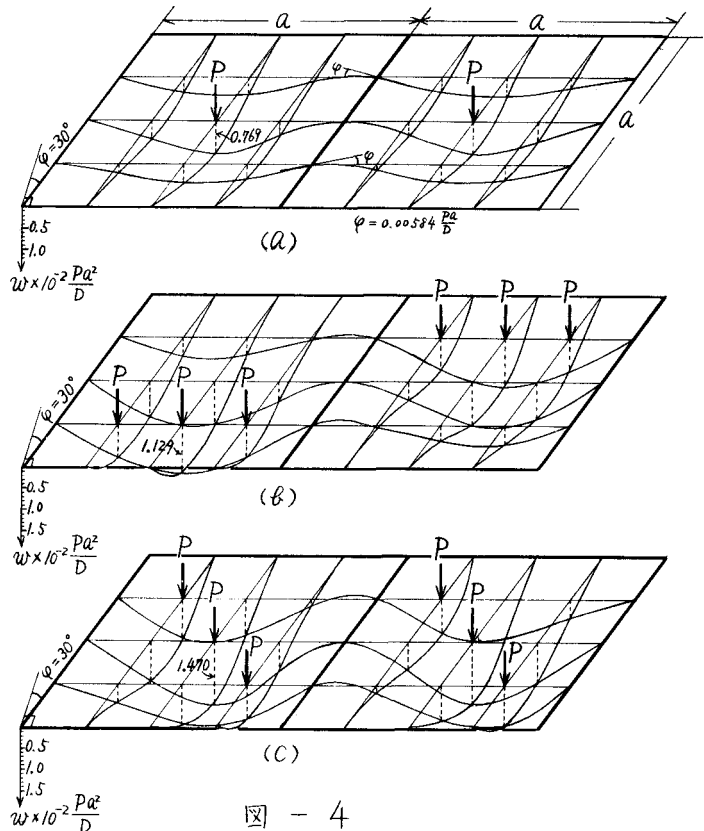


図 - 4

結語

本法による一方向連続斜板の解法骨子は

1. 本文の式(19)の Stiffness Matrix S を迅速に求

め、その行列要素の配列をプログラムに組むこと。

2. S の逆行列を算定し、各節点の未知変形成分 U を決定すること。

にあるが、後者については電子計算機の進歩により計算の精度とスピードは著しく高められ、何らの懸念を要しない。また前者についても、本文の式(18)に例示したごとき Stiffness Matrix を、予め任意斜角の element に対して求めておけば、周辺支持条件の如何にかかわらず、 S の行列要素を全く機械的に配列することができる。

他方、element の Stiffness Matrix の誘導過程においては、斜交座標に対して定義された式(3)および式(5)の断面力、たわみ角をそれぞれ用いるだけで、以後は何れも斜交座標としての特別の配慮を必要とせず、直交座標の手法をそのまま踏襲できる点も極めて便利であり、これが本法の特色といえる。

参考文献

- 1) 岡村・吉田・小林：連続斜板の解析。土木学会関西支部年次学術講演会講演概要。昭和41年11月。
- 2) 山崎・彦坂・古川：直交異方性斜板の振動解析。第22回土木学会年次学術講演会講演概要。昭和42年5月。
- 3) L. S. D. Morley: Skew Plates and Structures. Pergamon Press. 1963.
- 4) R. J. Melosh: A Stiffness Matrix for Analysis of Thin Plates in Bending. J. Aero. Sci. vol. 28, 1963.
- 5) O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung: The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs. Proc. Instn. Civ. Engrs. vol 28, August 1964.
- 6) J. H. Argyris: Matrix Displacement Analysis of Plates and Shells. Ingenieur-Archiv. XXXV Band 1966.