

北海道大学工学部 正員 園村 勇

1. まえがき 前回には、厳正解が困難となるような周辺条件を持つ直交異方性扇形平板の階差法による解法を発表したが、今回は図-1に示すような周方向に連続し、且つ極方向と接線方向とで剛度を異にする連続直交異方性扇形平板の曲げの問題を扱う。

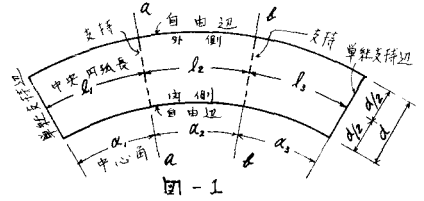


図-1

2. 基本微分方程式 r 方向の剛度を N_r , θ 方向の剛

度を N_θ とし, $c^2 = N_\theta / N_r$ とすると, 直交異方性扇形平板の微分方程式は次式となる。

$$\rho = N_r \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^3} + \frac{2c}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2c}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2(c+c^2)}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{c^2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial r} - \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{c^2}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right] \quad (1)$$

3. 階差方程式の誘導

(A) 一般の内点 図-2のような格子点配置で(1)式を階差方程式に表わすと次式を得る。

$$\rho \Delta^4 / N_r = Z_k w_k + Z_m w_m + Z_u w_u + Z_v w_v + Z_l w_l + Z_p w_p + Z_r w_r + Z_o w_o + Z_g w_g + Z_n w_n + Z_s w_s + Z_x w_x \quad (2a)$$

$$\therefore Z_k = 2 \left\{ 3 + \frac{1}{r^2} (c^2 \lambda^2 + 4c \lambda^2) - \frac{\lambda^2}{r^2} \{ 2\lambda^2 (c+c^2) - 3c^2 \lambda^2 \} \right\},$$

$$Z_l = - \left\{ 4 \left(1 - \frac{\lambda}{2r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{\lambda}{2r} \right) (c^2 \lambda^2 + 4c \lambda^2) \right\}, \quad Z_u = Z_v = \frac{c^2 \lambda^4}{r^2},$$

$$Z_l = - \left\{ 4 \left(1 + \frac{\lambda}{2r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\lambda}{2r} \right) (c^2 \lambda^2 + 4c \lambda^2) \right\}, \quad Z_x = 1 + \frac{\lambda}{r}, \quad Z_s = 1 - \frac{\lambda}{r},$$

$$Z_m = Z_n = - \frac{4\lambda^2}{r^2} \left\{ c - \frac{1}{2r^2} \{ \lambda^2 (c+c^2) - 2c \lambda^2 \} \right\}, \quad \text{但し } \lambda = \lambda / \varphi$$

$$Z_o = Z_g = \frac{2c \lambda^2}{r^2} \left(1 + \frac{\lambda}{2r} \right), \quad Z_p = Z_r = \frac{2c \lambda^2}{r^2} \left(1 - \frac{\lambda}{2r} \right) \quad (2b)$$

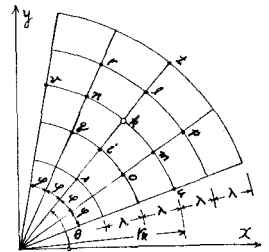


図-2

(B) 中間交点附近の格子点

中間交点には変位値を w_0 とすると, 図-3aに対しては, 格子点 p, m, o の座標値 w, r, θ と w_0 の関数式を得る。

$$\rho \Delta^4 / N_r = Z_k' w_k + Z_l' w_l + Z_u' w_u + Z_v' w_v + Z_p' w_p + Z_m' w_m + Z_o' w_o + Z_g' w_g + Z_n' w_n + Z_s' w_s + Z_x' w_x \quad (3a)$$

ここに $Z_k, Z_l, Z_g, Z_r, Z_s, Z_x$ は(2b)式

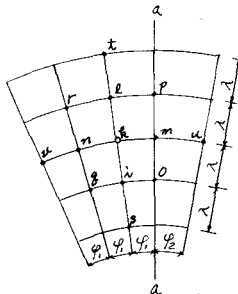


図-3a

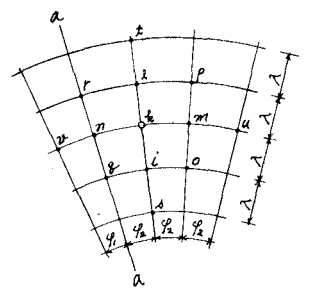


図-3b

による。 $\beta = q_1/q_2$ とすると Z'_k, Z'_n, Z'_u および Z'_u に対しては次式を得る。

$$Z'_k = Z_k - \frac{6c^2d^2}{r^2} \frac{\beta-1}{\beta+1}, \quad Z'_n = Z_n + \frac{4c^2d^2}{r^4} \frac{\beta-1}{\beta+2}, \quad Z'_u = \frac{Z_u}{\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}$$

$$Z'_u = \frac{4}{\beta+3} \quad (3b)$$

図-3bに対しては、 β を $\beta = q_1/q_2$ とおき、(3a)式をサフィックス n, u, r, q を $m, u, p, 0$ にそれぞれ置き換えるとよい。中間支点と外側自由辺とに隣接した格子点(図-4)に対しては $(M_r)_k = 0$ の周辺条件より外点の座標値を消去すると次式を得る。

$$\frac{\gamma \lambda^4}{N_r} = (Z'_k - Z_k)w_k + (Z_k + 2Z_n)w_n + Z_n w_n + Z'_n w_n + Z'_u w_u$$

$$+ Z'_u w_u + Z_s w_s + Z_p w_p + Z_r w_r \quad (4)$$

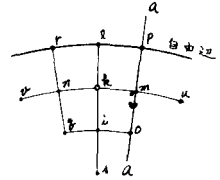


図-4

ここに Z'_k, Z'_n, Z'_u および Z'_u は(3b)式による。外側自由辺上にある格子点(図-5)に対しては、 $(V_r)_k = 0$ および $(M_r)_{k,n} = 0$ の周辺条件により外点を消去して次式を得る。

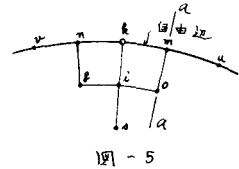


図-5

$$\frac{\gamma \lambda^4}{N_r} = 2 \left\{ 1 + \frac{1}{r^2} (\lambda^2 c^2 + 4c^2 d^2) + \frac{\lambda}{2r^2} \{ 3c^2 \lambda^2 + 4c^2 (c - c^2) \} \right.$$

$$\left. - \frac{c^2}{r^2} \left\{ 2\lambda^2 (3c + 2c^2) - \frac{6c^2 d^2}{\beta+1} \right\} \right\} w_k - 2 \left\{ 2 + \frac{1}{r^2} (1 + \frac{3\lambda}{2r}) \right.$$

$$(c^2 \lambda^2 + 4c^2 d^2) \left. \right\} w_n + \frac{4c^2 d^2}{r^2} (1 + \frac{3\lambda}{2r}) w_p - \frac{4c^2}{r^2} \left[c - \frac{1}{2r^2} \left\{ \lambda^2 (3c + 2c^2) - \frac{6c^2 d^2}{\beta+2} \right\} + \frac{\lambda}{2r} (c - c^2) \right] w_n + Z'_n w_n + Z'_u w_u + 2w_s \quad (5)$$

内側自由辺附近の階差方程式も同様に誘導できるが省略する。また、中間支点を離れて、周辺附近における格子点の階差方程式については、土木学会年次学術講演会第21回の前報を参照されたい。尚上式の誘導に於て、ポアソン比は零とした。

4. 数値計算例 計算例として、図-1に示す連続扇形平板に於て、 $d_1 = d_2 = d_3 = d$ 、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/9$ とし、等分布荷重を受けた場合について図-7に主曲げモーメント、図-8には ϕ の $d/2$ にあつた θ 方向の断面における撓みおよび曲げモーメント M_θ を示す。但し、 $c = 1.0$ 、 $q/d = 1.0$ とする。

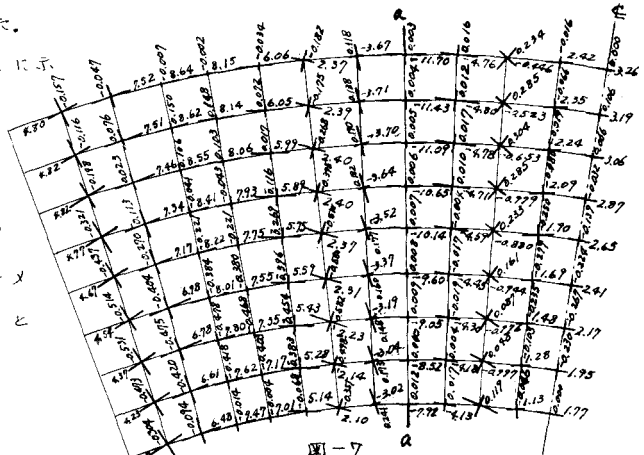


図-7
主曲げモーメント

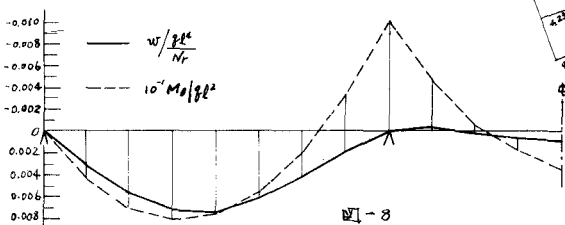


図-8

参考文献 芳村 仁 「曲線直交異方性扇形平板の曲げについて」土木学会論文集第82号