I －56　　フーリエ定和分変換による直交格子板の解法について

室蘭工業大学　正員　能町純雄

1，予備公式：次のような定和分変換公式を求めることができた。

a)，一変数の場合，次の Symbolic Notation

$$S_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{m-1} f(x)\cdot\sin\frac{i\pi x}{m} \quad (1), \qquad C_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{m-1} f(x)\cdot\cos\frac{i\pi x}{m} \quad (2),$$

を導入すると

$$f(x) = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m-1} S_i[f(x)]\cdot\sin\frac{i\pi x}{m}, \qquad (0<x<m) \qquad (3),$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} R_i \cos\frac{i\pi x}{m}, \qquad (0\leqq x\leqq m) \qquad (4),$$

ただし

$$R_0 = \frac{1}{m}\left\{C_0[f(x)] + \frac{1}{2}f(m) + \frac{1}{2}f(0)\right\}$$

$$R_i = \frac{2}{m}\left\{C_i[f(x)] + \frac{1}{2}f(m)(-1)^i + \frac{1}{2}f(0)\right\}$$

$$R_m = \frac{1}{m}\left\{C_m[f(x)] + \frac{1}{2}f(m)(-1)^m + \frac{1}{2}f(0)\right\}.$$

$x \cdot i = 0.1.2.3.\cdots m.$

b)，二次差分，変一次差分のフーリエ定和分

$$S_i[\Delta^2 f(x-1)] = -\sin\frac{i\pi}{m}\{(-1)^i f(m) - f(0)\} - D_i S_i[f(x)]. \qquad (5)$$

$$C_i[\Delta^2 f(x-1)] = \Delta f(m-1)(-1)^i - \Delta f(0) - D_i\left\{C_i[f(x)] + \frac{1}{2}f(m)(-1)^i + \frac{1}{2}f(0)\right\} \qquad (6)$$

$$S_i[f(x+1) - f(x-1)] = -2\sin\frac{i\pi}{m}\left\{C_i[f(x)] + \frac{1}{2}f(m)(-1)^i + \frac{1}{2}f(0)\right\} \qquad (7)$$

$$C_i[f(x+1) - f(x-1)] = -\{\Delta f(m-1)(-1)^i + \Delta f(0)\} + \left(1+\cos\frac{i\pi}{m}\right) \times \{f(m)(-1)^i - f(0)\} + 2\sin\frac{i\pi}{m} S_i[f(x)]. \qquad (8)$$

ただし，　$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$，　$D_i = 2\left(1-\cos\frac{i\pi}{m}\right)$.

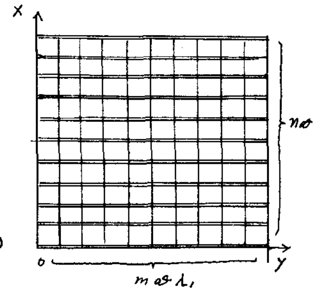
2，横桁の捩り抵抗が無視できる場合の直交格子桁の差分方程式．

主桁方向を x，横桁方向を y，方向としそれぞれ $m+1$，$n+1$ 本の桁が等間隔 λ_1，λ_2 に剛結直交する格子板が格点鉛直荷重をうける場合を考える。x 方向桁は曲げ剛さ EI_1，捩り剛さ GJ，y 方向桁は曲げ剛さ EI_2 とし，x，y 格点の y 軸まわり回転を $\theta_{x,y}$：x 軸まわりを $\theta'_{x,y}$：タワミを

$\delta_{x\cdot y}$ とすれば周知の公式から

$$M_{x\cdot x+1} = 2K_1\{2\theta_{x\cdot y} + \theta_{x+1\cdot y} - 3(\delta_{x+1\cdot y} - \delta_{x\cdot y})/\lambda_1\} \qquad (11)$$

$$M_{x\cdot x-1} = 2K_1\{2\theta_{x\cdot y} + \theta_{x-1\cdot y} - 3(\delta_{x\cdot y} - \delta_{x-1\cdot y})/\lambda_1\} \qquad (12)$$

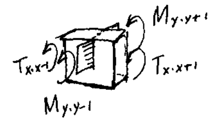


また主桁の抵抗トルクは

$$T_{x\cdot x+1} = B\cdot(\theta'_{x\cdot y} - \theta'_{x\cdot y-1}), \quad T_{x\cdot x-1} = B\cdot(\theta'_{x\cdot y} - \theta'_{x-1\cdot y}) \qquad (13)$$

$$M_{y\cdot y+1} = 2K_2\{2\theta'_{xy} + \theta'_{x\cdot y+1} - 3(\delta_{x\cdot y+1} - \delta_{x\cdot y})/\lambda_2\} \qquad (14)$$

$$M_{y\cdot y-1} = 2K_2\{2\theta'_{xy} + \theta'_{x\cdot y-1} - 3(\delta_{x\cdot y} - \delta_{x\cdot y-1})/\lambda_2\}. \qquad (15)$$



上式中， $K_1 = EI_1/\lambda_1$ ， $K_2 = EI_2/\lambda_2$ 　 $B_1 = GJ/\lambda_1$ ．

$x\,y$ 格点の x 方向曲げモーメントの釣合から

$$2K_1\{\Delta_x^2\theta_{x-1\cdot y} + 6\theta_{x\cdot y} - \frac{3}{\lambda_1}(\delta_{x+1\cdot y} - \delta_{x-1\cdot y})\} = 0 \qquad (16)$$

同じく y 方向のモーメントの釣合から

$$2K_2\{\Delta_y^2\theta'_{x\cdot y-1} + 6\theta'_{xy} - \frac{3}{\lambda_2}(\delta_{x\cdot y+1} - \delta_{x\cdot y-1})\} - B_1\Delta_x^2\theta'_{x-1\cdot y} = 0 \qquad (17)$$

次に鉛直方向力のつりあい $(M_{x+1\cdot x} + M_{x\cdot x+1} - M_{x\cdot x-1} - M_{x-1\cdot x})/\lambda_1 + (M'_{y+1\cdot y} + M'_{y\cdot y+1} - M'_{y\cdot y-1} - M'_{y-1\cdot y})/\lambda_2 + q_{xy} = 0$ から

$$\frac{6K_1}{\lambda_1}\{\theta_{x+1\cdot y} - \theta_{x-1\cdot y} - \frac{2}{\lambda_1}\Delta_x^2\delta_{x-1\cdot y}\} + \frac{6K_2}{\lambda_2}\{\theta'_{x\cdot y+1} - \theta'_{x\cdot y-1} - \frac{2}{\lambda_2}\Delta_y^2\delta_{x\cdot y-1}\} + q_{xy} = 0, \qquad (18)$$

3, θ_{xy} , θ'_{xy} , δ_{xy} のフーリエ定和分変換

方程式（16）～（18）にそれぞれ C_iS_r ， S_iC_r ， S_iS_r を作用させると

$$S_r[\mathfrak{M}_{i\,m}](-1)^i + S_r[\mathfrak{M}_{i\,o}] - \frac{6K_1}{\lambda_1}(1+\cos\frac{i\pi}{m})\{S_r[\delta_{m\cdot y}](-1)^i - S_r[\delta_{0\cdot y}]\}$$
$$+ 2K_1(6-D_i)\{C_iS_r[\theta_{x\cdot y}] + \frac{1}{2}S_r[\theta_{m\cdot y}](-1)^i + \frac{1}{2}S_r[\theta_{0\cdot y}]\} - \frac{12K_1}{\lambda_1}\sin\frac{i\pi}{m}S_iS_r[\delta_{x\cdot y}] = 0. \qquad (19)$$

$$S_i[\mathfrak{M}'_{r\,n}](-1)^r + S_i[\mathfrak{M}'_{r\,o}] - \frac{6K_2}{\lambda_2}(1+\cos\frac{r\pi}{n})\{S_i[\delta_{x\cdot n}](-1)^r - S_r[\delta_{x\cdot o}]\}$$
$$+ \sin\frac{i\pi}{m}[(-1)^i\{B(\theta'_{mn} + \theta'_{mo}) + BC_r[\theta'_{m\cdot y}]\} - \{B(\theta'_{on} + \theta'_{oo}) + BC_r[\theta'_{0\cdot y}]\}] + \frac{B}{2}D_i\{S_i[\theta'_{x\cdot n}](-1)^r$$
$$+ S_i[\theta'_{x\cdot o}]\} + \{2K_2(6-D_r) + B\cdot D_i\}\{S_iC_r[\theta'_{xy}] + \frac{1}{2}S_i[\theta'_{x\cdot n}](-1)^r + \frac{1}{2}S_i[\theta'_{x\cdot o}]\}$$
$$- \frac{12K_2}{\lambda_2}\sin\frac{r\pi}{n}S_iS_r[\delta_{x\cdot y}] = 0, \qquad (20)$$

$$- \frac{12K_1}{\lambda_1}\sin\frac{i\pi}{m}\{C_iS_r[\theta_{x\cdot y}] + \frac{1}{2}S_r[\theta_{m\cdot y}](-1)^i + \frac{1}{2}S_r[\theta_{0\cdot y}]\} - \frac{12K_2}{\lambda_2}\sin\frac{r\pi}{n}\{S_iC_r[\theta'_{x\cdot y}] + \frac{1}{2}S_i[\theta'_{x\cdot o}]$$
$$+ \frac{1}{2}S_i[\theta'_{x\cdot n}](-1)^r\} + \frac{12K_1}{\lambda_1^2}\sin\frac{i\pi}{m}\{(-1)^iS_r[\delta_{m\cdot y}] - S_r[\delta_{0\cdot y}]\} + \frac{12K_2}{\lambda_2^2}\sin\frac{r\pi}{n}\{(-1)^rS_i[\delta_{x\cdot n}]$$
$$- S_i[\delta_{x\cdot o}]\} + (\frac{12K_1}{\lambda_1^2}D_i + \frac{12K_2}{\lambda_2^2}D_r)S_iS_r[\delta_{x\cdot y}] = -S_iS_r[q_{x\cdot y}], \qquad (21)$$

上式中 $\mathfrak{M}_m$, $\mathfrak{M}_o$, は $x=m, 0$ に作用する外力モーメント。 $\mathfrak{M}'_n$, $\mathfrak{M}'_o$ は $y=n, 0$ に作用する外力モーメントである。

4，x の両端で単純支持，y の両端で自由な場合

このとき，境界条件は

$$\delta_{m\cdot y} = \delta_{o\cdot y} = 0 \,, \quad (22) \qquad \mathfrak{M}_m = \mathfrak{M}_o = \mathfrak{M}'_n = \mathfrak{M}'_o = 0 \,, \quad (23)$$

(23) はまた

$$2K_1 (2\theta_{m\cdot y} + \theta_{m-1\cdot y} + 3\delta_{m-1\cdot y}/\lambda_1) = 0 \,, \quad (24)$$

$$2K_1 (2\theta_{o\cdot y} + \theta_{1\cdot y} - 3\delta_{1\cdot y}/\lambda_1) = 0 \,, \quad (25)$$

$$2K_2 (2\theta'_{x\cdot n} + \theta'_{x\cdot n-1} - 3(\delta_{x\cdot n} - \delta_{x\cdot n-1})/\lambda_2) - B\Delta_x^2 \theta_{x\cdot n} = 0 \,, \quad (26)$$

$$2K_2 (2\theta'_{x\cdot o} + \theta'_{x\cdot 1} - 3(\delta_{x\cdot 1} - \delta_{x\cdot o})/\lambda_2) - B\Delta_x^2 \theta_{x-1\cdot o} = 0 \,, \quad (27)$$

また $y=n, 0$ における鉛直力のつりあいから

$$\frac{6K_1}{\lambda_1}(\theta_{x+1\cdot n} - \theta_{x-1\cdot n} - 3\Delta_x^2 \delta_{x-1\cdot n}/\lambda_1) \pm 6\frac{K_2}{\lambda_2}(\theta'_{x\cdot n} + \theta'_{x\cdot n-1} - 2(\delta_{x\cdot n} - \delta_{x\cdot n-1})/\lambda_2) = -P'_x \quad (28)$$

$$\frac{6K_1}{\lambda_1}(\theta_{x+1\cdot o} - \theta_{x-1\cdot o} - 2\Delta_x^2 \delta_{x-1\cdot n}/\lambda_1) + 6\frac{K_2}{\lambda_2}(\theta'_{x\cdot o} + \theta'_{x\cdot 1} - 2(\delta_{x\cdot 1} - \delta_{x\cdot o})/\lambda_2) = -P_x \,. \quad (29)$$

(19), (20), (21) 式中, (22), (23) を代入し

$$\Theta_{ir} = C_i S_r[\theta_{xy}] + \frac{1}{2} S_r[\theta_{m\cdot y}](-1)^i + \frac{1}{2} S_r[\theta_{o\cdot y}]$$

$$\Theta'_{ir} = S_i C_r[\theta'_{xy}] + \frac{1}{2} S_i[\theta_{xn}](-1)^r + \frac{1}{2} S_i[\theta_{x\cdot o}]$$

$$\Gamma_{ir} = S_i S_r[\delta_{xy}]$$

とおけば，

$$\Theta_{ir} = -6\sin\frac{i\pi}{m}\sin\frac{r\pi}{m}\Big[(D_r+\alpha D_i)\{S_i[\delta_{xo}] - S_i[\delta_{x\cdot n}](-1)^r\} + \frac{\alpha}{2}D_i\lambda_2\{S_i[\theta'_{xn}](-1)^r + S_i[\theta_{x\cdot o}]\}\Big]/\lambda_2 A + \frac{\lambda_2}{2K_2}\bar{q}_{ir}\sin\frac{i\pi}{m}\{2(6-D_r)+\alpha D_i\}/A \quad (30)$$

$$\Theta'_{ir} = -\frac{\alpha D_i}{2}(6-D_i)\Big\{D_r + \frac{\gamma D_i^2}{2(6-D_i)}\Big\}\{S_i[\theta_{x\cdot n}](-1)^r + S_i[\theta_{x\cdot o}]\}/A + \frac{3}{2}\gamma\beta^2 D_i^2(4-D_r)\{S[\delta_{x\cdot n}](-1)^n - S[\delta_{x\cdot o}]\}/A\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{K_2}(6-D_i)\sin\frac{r\pi}{n}\,\bar{q}_{ir}/A \quad (31)$$

$$\Gamma_{ir} = (6-D_i)\Big[(D_r+\alpha D_i)\{S[\delta_{x\cdot o}] - S[\delta_{x\cdot n}](-1)^n\} + \frac{\alpha}{2}D_i\{S[\theta_{xn}](-1)^r + S[\theta_{xo}]\}\Big]/A + \frac{\lambda_2^2}{12K_2}(6-D_i)\{2(6-D_r)+\alpha D_i\}\bar{q}_{ir}/A \quad (32)$$

ただし，

$$S_i S_r[q_{xy}] = \bar{q}_{ir} \,, \quad \alpha = B/K_2 \,, \quad \gamma = K_1/K_2 \,, \quad \beta = \lambda_1/\lambda_2$$

$$A = (6-D_i)\Big\{D_r^2 + D_r\Big(\alpha D_i - \frac{\gamma\beta^2 D_i^2}{(6-D_i)}\Big) + \frac{\gamma\beta^2 D_i^2}{(6-D_i)}\Big(6+\frac{\alpha}{2}D_i\Big)\Big\}$$

なお θ_{io}, Θ_{in} は (31) を Modify して直ちに之ることができる。

5. θ_{xy}, θ'_{xy}, δ_{xy} の値,

さきに述べた逆変換公式を使って

$$\theta_{xy} = \frac{4}{mn}\sum_{i=0}^{m}\sum_{r=1}^{n-1}\Theta_{ir}\cos\frac{i\pi x}{m}\sin\frac{r\pi x}{n}, \qquad \theta'_{xy} = \frac{4}{mn}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{r=0}^{n}\Theta'_{ir}\sin\frac{i\pi x}{m}\cos\frac{r\pi x}{n},$$

$$\delta_{xy} = \frac{4}{mn}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{r=1}^{n-1}\Gamma_{ir}\sin\frac{i\pi x}{m}\sin\frac{r\pi y}{n},$$

でもとめられるが,上式は更に

$$\theta_{xy} = -\frac{2}{m}\sum\cos\frac{i\pi x}{m}\Big[\frac{6}{\lambda_2(6-D_i)}\Big[\{(Q_i(y)+(\alpha D_i-\xi)P_i(y))\}S_i[\delta_{x0}]$$
$$+\{(Q_i(n-y)+(\alpha D_i-\xi)P_i(n-y)\}S_i[\delta_{xn}]\Big]$$
$$-\frac{2}{m}\sum\cos\frac{i\pi x}{m}\frac{\alpha D_i}{2}\{P_i(y)S_i[\theta'_{x0}]-P_i(n-y)S_i[\theta'_{xn}]\}$$
$$+\frac{4}{mn}\sum\sum\frac{\lambda_2\bar{q}_{ir}}{2K_2}\sin\frac{i\pi}{m}\{2(6-D_r)+\alpha D_i\}\sin\frac{i\pi x}{m}\sin\frac{r\pi y}{n}/A,$$

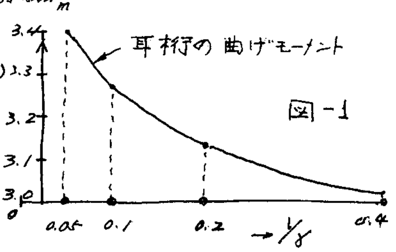
$$\theta'_{xy} = -\frac{2}{m}\sum\sin\frac{i\pi x}{m}\frac{\alpha}{2}D_i\Big[S_i[\theta_{xn}]\{\phi_i(n-y)-\psi_i(n-y)\cdot(\xi-\frac{\gamma\beta^2}{2}\frac{D_i^2}{6-D_i})\}\qquad(33)$$
$$+S_i[\theta_{x0}]\cdot\{\phi_i(y)-\psi_i(y)\cdot(\xi-\frac{\gamma\beta^2}{2}\frac{D_i^2}{6-D_i})\}\Big]$$
$$+\frac{2}{m}\sum\sin\frac{i\pi x}{m}\Big[\frac{3\gamma\beta^2D_i^2}{2\lambda_2(6-D_i)}\Big[\{+\phi_i(y)-(\xi+4)\psi_i(y)\}S_i[\delta_{x0}]+\{-\phi(n-y)$$
$$+(\xi+4)\psi_i(n-y)\}S_i[\delta_{xn}]\Big]+\frac{4}{mn}\sum\sum\frac{\lambda_2}{K_2}(6-D_i)\sin\frac{r\pi}{n}\bar{q}_{ir}/A\times\sin\frac{i\pi x}{m}\cos\frac{r\pi y}{n}.\qquad(34)$$

$$\delta_{xy} = \frac{2}{m}\sum\sin\frac{i\pi x}{m}\Big[\{Q_i(y)+(\alpha D_i-\xi)P_i(y)\}S[\delta_{x0}]+\{Q_i(n-y)+(\alpha D_i-\xi)P_i(n-y)\}$$
$$+\frac{\alpha}{2}D_i\lambda\{S_i[\theta_{x0}]\cdot P_i(y)-S_i[\theta_{xn}]\times P(n-y)\}\Big]$$
$$+\frac{4}{mn}\sum\sum\frac{\lambda_2^2\bar{q}_{ir}}{12K_2}(6-D_i)\{2(6-D_r)+\alpha D_i\}\sin\frac{i\pi x}{m}\sin\frac{r\pi y}{n}/A\qquad(35)$$

上式中, $S_i[\delta_{x0}]$, $S_i[\delta_{xn}]$, $S_i[\theta_{x0}]$, $S_i[\theta_{xn}]$ は境界条件 (26), (27), (28), (29) からもとめられる。

6、x方向主桁が無限にならんでいる単純格子板が,10パネルに横桁で区分される場合,について端部主桁に $P_x = P\sin\frac{\pi x}{m}$ の格点荷重がある場合を数値計算した。

$$M_{x\cdot x-1} = \frac{2}{m}\sum\frac{6K_1D_i}{(6-D_i)\lambda_2}(Q_i(y)+(\alpha D_i-\xi)P_i(y))\times S_i[\delta_{x0}]\sin\frac{i\pi}{m}x$$
$$+\frac{2}{m}\sum\frac{6K_1D_i^2}{(6-D_i)}\frac{\alpha}{2}P_i(y)\cdot S_i[\theta'_{x0}]\sin\frac{i\pi}{m}x,\qquad(36)$$



図−1

いま β = 1, γ/α = 2 の場合をとりも知量は次の如し

γ = 20	γ = 15	γ = 10	γ = 5	γ = 2.5	
0.49508	0.46272	0.43041	0.39145	0.36927	$S_i[\delta_{x0}]$
0.11036	0.10152	0.09883	0.08839	0.07842	$S_i[\theta'_{x0}]$

この場合横桁の剛度を相当変化させても分担曲げモーメントは格段の差は見られない。