

東大生研 正員 久保慶三郎

東大生研 正員 ○吉田 裕

1. はじめに

鉄筋コンクリート床版や一方に補強された板、さらには格子桁構造等も巨視的に直交異方性板として解析される。本来、材料の直交異方性板はほとんど存在せず、大部分が構造的異方性板である。それ故に、各構造形態による差異は非常に大きく、これを等一様な微分方程式で論ずることは問題である。格子桁構造やリアつき板等構造そのものとして解析することが可能である問題は、可能な限りその構造形態を正しく評価すべきであり、事実その方向に進んでいる。

鉄筋コンクリート床版や密に溝をつけられた板のような充梁板、また、板の塑性座屈理論においては、基礎微分方程式が有効に使われる。

ここで問題となるのは、材料の諸係数であり、特に剪断剛性の取扱ひ方である。

一般には、微分方程式の解が $K = H/\sqrt{D_x D_y}$ によって左右されるために、 K の値の決め方の問題となる。また、塑性座屈理論においては、係数の決め方に種々の提案がなされている。

係数 $E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{yx}$ のうち独立なものは4個であるが、ここでもう一つ剪断剛性をその他の係数の関数として導入することを提案し、密に溝をつけた板によって、その妥当性を検討する。

2. 基礎微分方程式

提案の要旨を説明する。

$$D_x = E_x h^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx}), \quad D_y = E_y h^3 / 12(1 - \nu_{yx} \nu_{xy}), \quad D_{xy} = G h^3 / 6 \quad \text{とおく。}$$

$$M_x = -\left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{xy} D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_y = -\left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{yx} D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad M_{xy} = D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

と表わされる。ここで、曲げモーメント和 M として、次のような関係式を導入する。

$$\text{すなわち, } M = \frac{(1 - \nu_{yx}) M_x + (1 - \nu_{xy}) M_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{これは, } \nu = \nu_{xy} = \nu_{yx} \\ \text{のとき } M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} \\ \text{となる。} \end{array} \right)$$

$$M_x, M_y \text{ を代入して整理すれば } M = -\left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

となる。次に、剪断剛性 G に対して、次のような関係式を導入する。

$$\text{すなわち, } G = \frac{(1 - \nu_{yx}) E_x + (1 - \nu_{xy}) E_y}{4(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} \quad \text{----- (1)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{これは, } E = E_x = E_y \\ \nu = \nu_{xy} = \nu_{yx} \\ \text{のとき } G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \\ \text{となる。} \end{array} \right)$$

$$\text{そうすると, } D_{xy} \text{ は } D_{xy} = \frac{(1 - \nu_{yx}) D_x + (1 - \nu_{xy}) D_y}{2}$$

と表わされるから

$$\text{基礎微分方程式は } D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_x + D_y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y)$$

となる。これは、また、 M によって

$$\text{と表わすことができる。} \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -q(x, y)$$

3. 計算式および境界条件

先に等方性板の計算式を提案⁽¹⁾したが、これを拡張し、次の2つの関係式によって直交異方性板を解析することが可能である。

$$P_{ij} = \frac{-M_{i-1,j} + 2M_{ij} - M_{i+1,j}}{\lambda_x} \times \lambda_y + \frac{-M_{i,j-1} + 2M_{ij} - M_{i,j+1}}{\lambda_y} \times \lambda_x$$

$$\lambda_x \lambda_y \left\{ \frac{2}{3} M_{i,j} + \frac{1}{12} (M_{i-1,j} + M_{i+1,j} + M_{i,j-1} + M_{i,j+1}) \right\}$$

$$= \frac{-\Delta_{i-1,j} + 2\Delta_{ij} - \Delta_{i+1,j}}{\lambda_x} \times \lambda_y \times D_x + \frac{-\Delta_{i,j-1} + 2\Delta_{ij} - \Delta_{i,j+1}}{\lambda_y} \times \lambda_x \times D_y$$

但し $M = \frac{(1-\nu_{yx}) M_x + (1-\nu_{xy}) M_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}$

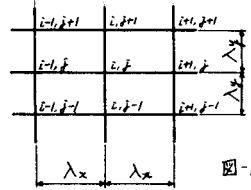


図-1

こゝで境界条件が問題となるが、上記の2つの関係式によって問題を解析するために、次のような境界条件を用いる。

すなわち、 M_x, M_y, M_{xy} 等のモーメントに関しては、

そのためにに関する微分方程式を階差式に展開し、この関係式を用いて、与えられた条件を考慮する。

次に V_x, V_y について考える。 $V_x = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (\nu_{xy} D_y + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ であるから、 D_{xy} に先の関係式を代入して、 $V_x = -\left\{ D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left\{ D_y + (1-\nu_{yx}) D_x \right\} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right\}$ を得る。これはまた $M = -\left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ であることより

$$V_x = \frac{\partial M}{\partial x} - (1-\nu_{yx}) D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y^2}$$

と表わされる。

同様に

$$V_y = \frac{\partial M}{\partial y} - (1-\nu_{xy}) D_y \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad \text{となる。}$$

この式の右辺を、モーメント和およびたわみに関して階差式に展開すると、 V の条件として

M と Δ の関係式を得ることが出来る。このように、モーメントおよび剪断力に関する境界条件を使いわけることによって、先の2つの式による解析が可能になる。

また、等方性の板の場合には $V_x = \frac{\partial M}{\partial x} - (1-\nu) D \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y^2}$, $V_y = \frac{\partial M}{\partial y} - (1-\nu) D \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ となる。

4. 溝つき板による係数の実測

厚さ 10mm のアルミニウム板に図-2 のように密に溝をつけた

試験体を作製し、同じ材料から溝の方向とそれに直交する方向の

幅 3cm、長さ 35cm の試験片を取り出し各係数を測定した。まず曲げによる歪を測定し表1. に示す

結果を得た。表2. は曲げ試験による係数測定

の精度を知るために、同じ寸法の溝のない、

すなわち、等方性の試験片によって、曲げと

引張試験の両方から、弾性係数およびポアソン比

を測定した結果を示したものである。

表1 ($\times 10^6 \text{ kg/cm}^2$)

D_x	D_y	$\nu_{yx} D_x$	$\nu_{xy} D_y$	E_x	E_y	ν_{xy}	ν_{yx}
0.04702	0.02509	0.007841	0.007809	0.5350	0.2854	0.3113	0.1667

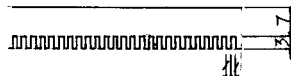


図-2 (単位 mm)

表2

$E (\times 10^6 \text{ kg/cm}^2)$		ν	
曲げ試験による測定値	引張試験による測定値	曲げ試験による測定値	引張試験による測定値
0.714	0.713	0.302	0.298
0.716	0.721	0.304	0.311

$h = 10 \text{ mm}$ としたときの係数

5. 係数 η について

試験片の都合で、次のような方法で係数 η の測定を行った。すなわち、曲げ試験に用いた幅 3 cm、長さ 35 cm の試験片を挟み、20 cm の間隔で挟み角を測定し、挟みモーメント M_T と挟み率 η との関係を求める。その結果から、係数 η を決めるのであるが、測定法、特に試験体端部の拘束条件等に問題が残り、測定結果の評価の仕方はむづかしい。ここでは、一応 Saint Venant の挟み理論による矩形棒の挟みの公式⁽²⁾

$$M_T = \frac{1}{3} \cdot G \cdot \eta \cdot a^3 \cdot b \cdot f\left(\frac{b}{a}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \frac{b}{a} = 3.0 \text{ のとき} \\ f\left(\frac{b}{a}\right) = 0.78995 \end{array} \right)$$

によって評価することにした。そのため、測定結果の評価にこの公式を適用することの妥当性を調べておく必要がある。溝のない等方性矩形棒を同じ条件で挟み、その結果と比較した。

測定結果は図-3 に示した通りである。この結果に基づいて公式から η を逆算し、弾性係数およびポアソン比から計算した値と比較したものが表-3 である。また、文献に図-4 に示すような鋼製試験片による測定結果が示されているので、その値を参考のため表示し、関係式(1) による値と比較したものが表-4 である。

表-3 ($\times 10^6 \text{ kg/cm}^2$)

	挟み試験から逆算した η		$\frac{(1-\nu_x)E_x + (1-\nu_y)E_y}{4(1-\nu_x\nu_y)}$
	試験片 1	試験片 2	
長さ方向に溝のある試験片	0.110	0.113	0.169
幅方向に溝のある試験片	0.112	0.114	
溝のない等方性試験片	0.267	0.260	0.275

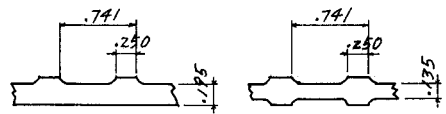
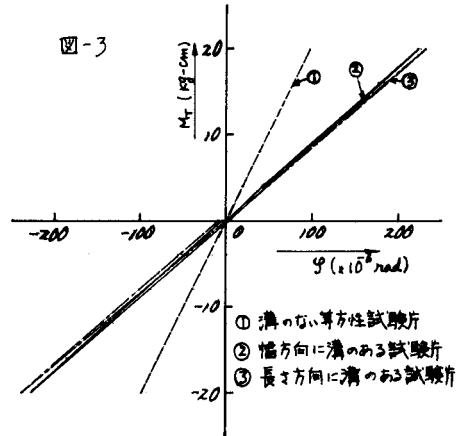


図-4 (単位 inch)

	ELASTIC MODULI AND POISSON'S RATIOS (lb. in)					$\frac{(1-\nu_x)E_x + (1-\nu_y)E_y + \rho^2}{4(1-\nu_x\nu_y)}$
	$E_x h^3$	$E_y h^3$	ν_{xy}	ν_{yx}	$G_{xy} h^3$	
Plate grooved on one side	375000	296000	0.28	0.22	107000	134700
Plate grooved on both sides	252000	126500	0.44	0.22	77800	74000

表-4

6. 計算例

表-3 に示したように、等方性材の挟み試験の結果から、この挟み試験の結果がかなり正当性のあるものであることが分かる。関係式(1)によ、て η を定義することは、この場合は、剪断剛性を実際よりも非常に大きな値として考えていることになる。

そこで、計算例として、係数 η の値が非常に大きく影響するような例題と、この値がそれほど影響しないと思われる例題の二通りを送る。すなわち、図-5 に示すような矩形板の一端を単純支持し、

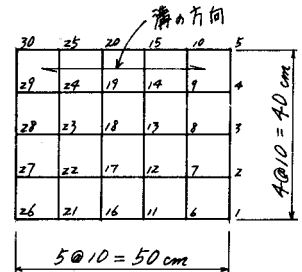


図-5

残る隅に集中荷重を載荷し、4隅を単純支持し、中央に集中荷重を載荷し、その2通りである。計算と並行して、同じ条件で実験を行い測定結果と比較検討する。

なお、試験体の断面は図-2に示したものと同一である。

7. 考察

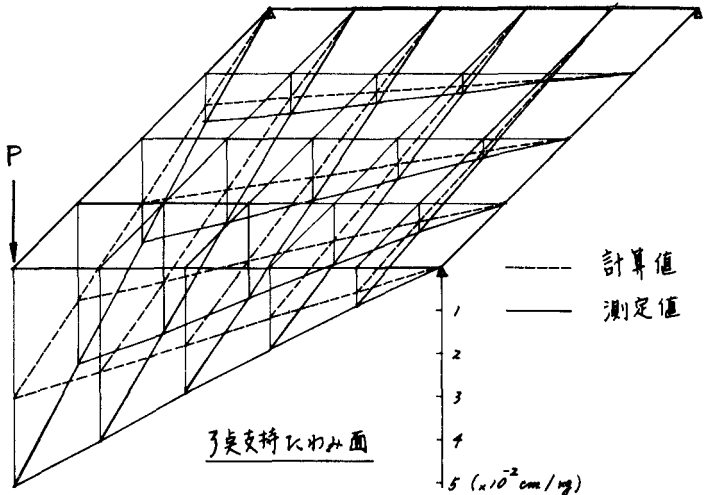
計算結果と実験結果とを比較

して、4点支持のように板の
影響が小さい場合には、係数 η
の評価に問題があるにもかかわらず、このような計算法が非常に精度よく適用できることが分る。3点支持で残りの1隅に集中荷重を作用させる場合のように係数 η の影響が100%きいてくるような場合には、やはりその評価の誤差がはつきり表わ

れている。計算値と測定値の比が関係式(1)によって求めた η の値と実験による η の値との比にほぼ等しいことがこれを如実に物語っている。

また、表-4の結果その他から、関係式(1)は材料の2方向の剛性の差が比較的小さく、断面が中立面に関して対称であるような場合に適用範囲が大きくなるのではないかと考えている。

このような解析法によれば、非常に複雑な直交異方性板の問題を簡明に解くことができ、関係式(1)が適用できる範囲においては、板わみに対しては勿論、曲げモーメントに対しても精度の高い解を得ることができるので、鉄筋コンクリート床版等の解析に適用すべく研究を続けている。



4点支持板わみ計算値 ($\times 10^{-4}$ cm)

	7.37	11.99	11.51	6.79	
8.06	13.82	17.42	16.19	11.58	5.64
11.92	17.24	20.85	18.86	13.90	8.18
8.06	13.82	17.42	16.19	11.58	5.64
	7.37	11.99	11.51	6.79	

4点支持板わみ測定値 ($\times 10^{-4}$ cm)

	7.65	11.45	11.60	6.80	
7.95	13.20	16.75	15.40	11.15	5.25
12.30	16.70	20.05	17.60	13.05	7.35
8.25	13.30	16.65	15.35	10.80	5.25
	7.20	11.30	11.35	6.95	

■ は載荷点, □ は支持点

参考文献

- (1) 久保, 吉田 点支持をもち集中荷重を受けるはりおよび板の解析 土木学会論文集
- (2) 倉西正嗣 応用弾性学 天立出版 第130号
- (3) W.H. Hoppmann 他 A Study of Orthogonally Stiffened Plates
Journal of Appl. Mech. Spt. '56