

九州大学工学部 正員 山崎徳也

橋本 武

建設省 ○今岡亮司

1. 緒言

先に著者らは、フーリエ級数を平板問題に適用して、周辺で単純支持される無梁板⁽¹⁾、および一対辺が単純支持され、他対辺が固定または単純支持されかつ中間支点で点支持される無梁板⁽²⁾の理論解を発表したが、これらの無梁板解法は次の諸点で既往の諸研究より優れている。すなわち、任意垂直荷重に対して解析しうること、中間支柱の配列は全く任意でありしたがってその間隔も任意であること、またその解法は未知不静定力を未知数とする多元連立一次方程式を解くだけの簡単な内容であり、しかも必要とあれば、任意点の変位量も不静定力と同時に求めること、中間支点の支点沈下の問題に適用することなどである。本研究は同様の手法を応用拡張して、中間支柱の反力モーメントを考慮して、一対辺が単純支持され、他対辺が固定または単純支持される無梁板の解法を提示し、かかる構造物の解析ならびに設計に資せんとするものである。

2. 解法

(1) 板の弾性曲面 図-1に示すごとく矩形板A B C Dに直交座標 (x, y, z) を導入し、辺A B, C Dが単純支持されるものとする。しかるとき、板面に対して垂直な任意荷重 $q(x, y)$ が作用するものとするれば板のZ軸方向のたわみ W は一般に次式で表わされる。

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \{ A_n \sinh \beta_n x + B_n x \sinh \beta_n x + C_n \cosh \beta_n x + D_n x \cosh \beta_n x \} \sin \beta_n y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (1)$$

$$\text{ここに } \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad G_{mn} = \frac{f_{mn}}{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)} \\ f_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dy \, dx \quad (2)$$

D: 板剛度 ($\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$), E : 板の弾性係数, t : 板の厚さ, ν : 板のポアソン比

辺ACおよびBDにおいて、端モーメント $M_A(y)$ および $M_B(y)$ (図-1に示す方向を正とする)が作用し、かつ沈下 $\delta_A(y)$ および $\delta_B(y)$ を起すものとするれば辺AC, BDにおける境界条件を任意として次の一般表示をうる。

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で } W=(W)_{x=0} &= \delta_A(y), & M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=0} = M_A(y) \\ x=a \text{ で } W=(W)_{x=a} &= \delta_B(y), & M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=a} = -M_B(y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$\delta_A(y)$, $\delta_B(y)$, $M_A(y)$, $M_B(y)$ は y に関する任意関数で次のごとく正弦フーリエ級数にて表わしうるものと仮定する。

$$\delta_A(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{An} \sin \beta_n y, \quad \delta_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{Bn} \sin \beta_n y, \quad M_A(y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{An} \sin \beta_n y, \quad M_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{Bn} \sin \beta_n y \quad (4)$$

式(4)および式(1)を式(3)に代入して $A_n \sim D_n$ に関する連立方程式を解けば、積分定数 $A_n \sim D_n$ が次のごとく求まる。

$$\left. \begin{aligned} A_n &= -M_{An} \frac{a}{2D\beta_n \sinh^2 \beta_n} - M_{Bn} \frac{a \cosh \beta_n}{2D\beta_n \sinh^2 \beta_n} - \delta_{An} \frac{\beta_n(1-\nu) + 2 \cosh \beta_n \sinh \beta_n}{2 \sinh^2 \beta_n} + \delta_{Bn} \frac{2 \sinh \beta_n + \beta_n(1-\nu) \cosh \beta_n}{2 \sinh^2 \beta_n} \\ D_n &= M_{An} \frac{\cosh \beta_n}{2D\beta_n \sinh \beta_n} + M_{Bn} \frac{1}{2D\beta_n \sinh \beta_n} + \delta_{An} \frac{\beta_n(1-\nu) \cosh \beta_n}{2 \sinh \beta_n} - \delta_{Bn} \frac{\beta_n(1-\nu)}{2 \sinh \beta_n} \\ B_n &= -M_{An} \frac{1}{2D\beta_n} - \delta_{An} \frac{\beta_n(1-\nu)}{2}, \quad C_n = \delta_{An} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし $\beta_n = \frac{n\pi}{b} a = \frac{n\pi}{\mu} a = \frac{\pi \pi}{\mu}, \mu = \frac{b}{a}$

次に無梁板を支える中間支柱を1, 2, ..., i, j, ..., rとし, 板に任意垂直荷重 $p(x, y)$ が作用するとき
各中間支柱に生ずる垂直反力を $V_{11}, V_{12}, \dots, V_{ij}, \dots, V_{rs}$, x方向の反力モーメントを $M_{11}^x, M_{12}^x, \dots, M_{ij}^x, \dots, M_{rs}^x$
y方向の反力モーメントを $M_{11}^y, M_{12}^y, \dots, M_{ij}^y, \dots, M_{rs}^y$ とする。ただし垂直反力は上向きを正, x方向モー
メントは原点側から見て右回りを正, y方向モーメントは原点側から見て左回りを正とする。しかると
き, 垂直反力および反力モーメントも板に対する荷重と見なせば, 文献(1)に示すごとく式(2)は次式で
表わされる。

$$f_{mn} = F_{mn} - \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \{ V_{ij} \sin m\pi \alpha_i \sin n\pi \beta_j - M_{ij}^x \cos m\pi \alpha_i \sin n\pi \beta_j - M_{ij}^y \beta_n \sin m\pi \alpha_i \cos n\pi \beta_j \} \quad (6)$$

式(6)および式(5)を式(7)に代入すれば, 図-1に示す無梁板の弾性曲面式が次式のごとくえられる。

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \{ M_{mn} \left(-\frac{a \sinh \beta_n x}{2 D \beta_n \sinh^2 \beta_n} - \frac{x \sinh \beta_n x}{2 D \beta_n} + \frac{x \cosh \beta_n \cosh \beta_n x}{2 D \beta_n \sinh \beta_n} \right) \right. \\ \left. + M_{Bn} \left(-\frac{a \cosh \beta_n \sinh \beta_n x}{2 D \beta_n \sinh^2 \beta_n} + \frac{x \cosh \beta_n x}{2 D \beta_n \sinh \beta_n} \right) \right. \\ \left. + \delta_{An} \left(-\frac{\beta_n (1-\nu) + 2 \cosh \beta_n \sinh \beta_n}{2 \sinh^2 \beta_n} \right) \frac{\sinh \beta_n x}{2} - \frac{x \beta_n (1-\nu) \sinh \beta_n x}{2} + \cosh \beta_n x + \frac{x \beta_n (1-\nu) \cosh \beta_n \cosh \beta_n x}{2 \sinh \beta_n} \right. \\ \left. + \delta_{Bn} \left(\frac{2 \sinh \beta_n + \beta_n (1-\nu) \cosh \beta_n}{2 \sinh^2 \beta_n} \right) \frac{\sinh \beta_n x}{2} - \frac{x \beta_n (1-\nu) \cosh \beta_n x}{2 \sinh \beta_n} \right) \} \sin \beta_n y \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{mn}}{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (7)$$

式(7)において M_{11}, M_{12} および中間支柱の垂直反力と反力モーメントが明らかになれば, 弾性曲面式 W が
決定でき, したがって本題の無梁板の諸変位および諸断面力が全て求まることとなる。

(2) 基本連立方程式 図-1に示す無梁板において中間支柱(k, l)の垂直変位を d^{kl} (下向きを正
する)x方向およびy方向のたわみ角を $\theta_x^{kl}, \theta_y^{kl}$ (反力モーメントと同方向を正とする)とすれば, 板にお
ける同じ点(k, l)のたわみおよびたわみ角は $d^{kl}, \theta_x^{kl}, \theta_y^{kl}$ に等しいことより次のごとき変形条件式をうる。

$$\alpha^{kl} = (W)_{x=\alpha_k} \quad \theta_x^{kl} = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=\alpha_k} \quad \theta_y^{kl} = \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=\beta_l} \quad \text{ただし } (\alpha_k, \beta_l) \text{ は } (k, l) \text{ 点の座標値} \quad (8)$$

$k=1, 2, \dots, r \quad l=1, 2, \dots, s$

式(8)に式(7)を代入して演算のうえ整理すれば次のごとき一連の条件式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (R_{ij} D_{ij}^{kl} - \frac{\pi}{a} M_{ij}^x D_{xij}^{kl} - \frac{\pi}{b} M_{ij}^y D_{yij}^{kl}) + \sum_{m=1}^{\infty} M_{1m} D_{1m}^{kl} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{Bn} D_{Bn}^{kl} + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Am} D_{Am}^{kl} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{Bn} D_{Bn}^{kl} &= \frac{a \cdot b}{4} D^{kl} - \frac{a \cdot b}{4} D \pi^2 d^{kl} \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (R_{ij} E_{ij}^{kl} - \frac{\pi}{a} M_{ij}^x E_{xij}^{kl} - \frac{\pi}{b} M_{ij}^y E_{yij}^{kl}) + \sum_{m=1}^{\infty} M_{1m} E_{1m}^{kl} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{Bn} E_{Bn}^{kl} + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Am} E_{Am}^{kl} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{Bn} E_{Bn}^{kl} &= \frac{a \cdot b}{4} E^{kl} - \frac{a \cdot b}{4} D \pi^2 \theta_x^{kl} \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (R_{ij} F_{ij}^{kl} - \frac{\pi}{a} M_{ij}^x F_{xij}^{kl} - \frac{\pi}{b} M_{ij}^y F_{yij}^{kl}) + \sum_{m=1}^{\infty} M_{1m} F_{1m}^{kl} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{Bn} F_{Bn}^{kl} + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Am} F_{Am}^{kl} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{Bn} F_{Bn}^{kl} &= \frac{a \cdot b}{4} F^{kl} - \frac{a \cdot b}{4} D \pi^2 \theta_y^{kl} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\text{ここに } k=1, 2, 3, \dots, r \quad l=1, 2, 3, \dots, s \quad K_{mn} = \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2$$

$$D_{ij}^{kl} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi \alpha_i \sin n\pi \beta_j \sin m\pi \alpha_k \sin n\pi \beta_l$$

$$D_{xij}^{kl} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{K_{mn}} \cos m\pi \alpha_i \sin n\pi \beta_j \sin m\pi \alpha_k \sin n\pi \beta_l$$

$$D_{yij}^{kl} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{K_{mn}} \sin m\pi \alpha_i \cos n\pi \beta_j \sin m\pi \alpha_k \sin n\pi \beta_l$$

$$D_{1n}^{kl} = \frac{a^2 b \pi^4}{8 \beta_n} \left(-\frac{\sinh \beta_n \alpha_k}{\sinh^2 \beta_n} + \alpha_k \sinh \beta_n \alpha_k - \frac{\alpha_k \cosh \beta_n \cosh \beta_n \alpha_k}{\sinh \beta_n} \right) \sin n\pi \beta_l$$

$$D_{Bn}^{kl} = \frac{a^2 b \pi^4}{8 \beta_n} \left(\frac{\cosh \beta_n \sinh \beta_n \alpha_k}{\sinh^2 \beta_n} - \frac{\alpha_k \cosh \beta_n \alpha_k}{\sinh \beta_n} \right) \sin n\pi \beta_l$$

$$D_{An}^{kl} = \frac{a b D \pi^4}{8} \left\{ \frac{\beta_n (1-\nu) \sinh \beta_n \alpha_k}{\sinh^2 \beta_n} + \frac{2 \cosh \beta_n \sinh \beta_n \alpha_k}{\sinh \beta_n} + \alpha_k \beta_n (1-\nu) \sinh \beta_n \alpha_k \right. \\ \left. - 2 \cosh \beta_n \alpha_k - \frac{\beta_n \alpha_k (1-\nu) \cosh \beta_n \cosh \beta_n \alpha_k}{\sinh \beta_n} \right\} \sin n\pi \beta_l$$

$$D_{Bn}^{kl} = \frac{a b D \pi^4}{8 \sinh \beta_n} \left\{ -2 \sinh \beta_n \alpha_k - \frac{\beta_n (1-\nu) \cosh \beta_n \sinh \beta_n \alpha_k}{\sinh \beta_n} + \beta_n \alpha_k (1-\nu) \cosh \beta_n \alpha_k \right\} \sin n\pi \beta_l$$

$$E_{ij}^{kl} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{K_{mn}} \sin m\pi \alpha_i \sin n\pi \beta_j \cos m\pi \alpha_k \sin n\pi \beta_l$$

$$E_{xij}^{kl} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2}{K_{mn}} \cos m\pi \alpha_i \sin n\pi \beta_j \cos m\pi \alpha_k \sin n\pi \beta_l$$

$$E_{yij}^{kl} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{K_{mn}} \sin m\pi \alpha_i \cos n\pi \beta_j \cos m\pi \alpha_k \sin n\pi \beta_l$$

$$\begin{aligned}
E_{An}^{kl} &= \frac{a^2 b \pi^3}{8 \sinh \bar{t}_n} \left\{ \frac{\cosh \bar{t}_n \cosh \bar{t}_n \alpha_k}{\sinh \bar{t}_n} + \frac{\sinh \bar{t}_n \sinh \bar{t}_n \alpha_k}{\bar{t}_n} + \alpha_k \sinh \bar{t}_n \cosh \bar{t}_n \alpha_k - \frac{\cosh \bar{t}_n \cosh \bar{t}_n \alpha_k}{\bar{t}_n} \right. \\
&\quad \left. - \alpha_k \cosh \bar{t}_n \sinh \bar{t}_n \alpha_k \right\} \sin \pi \beta_j \\
E_{Bn}^{kl} &= \frac{a^2 b \pi^3}{8 \sinh \bar{t}_n} \left(\frac{\cosh \bar{t}_n \cosh \bar{t}_n \alpha_k}{\sinh \bar{t}_n} - \frac{\cosh \bar{t}_n \alpha_k}{\bar{t}_n} - \alpha_k \sinh \bar{t}_n \alpha_k \right) \sin \pi \beta_j \\
E_{An}^{kl} &= \frac{a b D \pi^3 \bar{t}_n}{8 \sinh \bar{t}_n} \left\{ \frac{\bar{t}_n (1-\nu) \cosh \bar{t}_n \alpha_k}{\sinh \bar{t}_n} - \nu \sinh \bar{t}_n \sinh \bar{t}_n \alpha_k + \bar{t}_n \alpha_k (1-\nu) \sinh \bar{t}_n \cosh \bar{t}_n \alpha_k \right. \\
&\quad \left. + (1+\nu) \cosh \bar{t}_n \cosh \bar{t}_n \alpha_k - \bar{t}_n \alpha_k (1-\nu) \cosh \bar{t}_n \sinh \bar{t}_n \alpha_k \right\} \sin \pi \beta_j \\
E_{Bn}^{kl} &= \frac{a b D \pi^3 \bar{t}_n}{8 \sinh \bar{t}_n} \left\{ - \frac{\bar{t}_n (1-\nu) \cosh \bar{t}_n \alpha_k}{\sinh \bar{t}_n} - (1+\nu) \cosh \bar{t}_n \alpha_k + \bar{t}_n \alpha_k (1-\nu) \sinh \bar{t}_n \alpha_k \right\} \sin \pi \beta_j \\
F_{ij}^{kl} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{K_{mn}} \sin \pi \alpha_i \sin \pi \beta_j \sin \pi \alpha_k \cos \pi \beta_l \\
F_{xij}^{kl} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \pi}{K_{mn}} \cos \pi \alpha_i \sin \pi \beta_j \sin \pi \alpha_k \cos \pi \beta_l \\
F_{yij}^{kl} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{K_{mn}} \sin \pi \alpha_i \cos \pi \beta_j \sin \pi \alpha_k \cos \pi \beta_l \\
F_{in}^{kl} &= \frac{a^2 b \pi^3}{8 \sinh \bar{t}_n} \left(\frac{\sinh \bar{t}_n \alpha_k}{\sinh \bar{t}_n} + \alpha_k \sinh \bar{t}_n \sinh \bar{t}_n \alpha_k - \alpha_k \cosh \bar{t}_n \cosh \bar{t}_n \alpha_k \right) \cos \pi \beta_j \\
F_{Bn}^{kl} &= \frac{a^2 b \pi^3}{8 \sinh \bar{t}_n} \left(\frac{\cosh \bar{t}_n \sinh \bar{t}_n \alpha_k}{\sinh \bar{t}_n} - \alpha_k \cosh \bar{t}_n \alpha_k \right) \cos \pi \beta_j \\
F_{An}^{kl} &= \frac{a b D \pi^3 \bar{t}_n}{8 \sinh \bar{t}_n} \left\{ \frac{\bar{t}_n (1-\nu) \sinh \bar{t}_n \alpha_k}{\sinh \bar{t}_n} + 2 \cosh \bar{t}_n \sinh \bar{t}_n \alpha_k + \alpha_k \bar{t}_n (1-\nu) \sinh \bar{t}_n \sinh \bar{t}_n \alpha_k \right. \\
&\quad \left. - 2 \sinh \bar{t}_n \cosh \bar{t}_n \alpha_k - \alpha_k \bar{t}_n (1-\nu) \cosh \bar{t}_n \cosh \bar{t}_n \alpha_k \right\} \cos \pi \beta_j \\
F_{Bn}^{kl} &= \frac{a b D \pi^3 \bar{t}_n}{8 \sinh \bar{t}_n} \left\{ - 2 \sinh \bar{t}_n \alpha_k - \frac{\bar{t}_n (1-\nu) \cosh \bar{t}_n \sinh \bar{t}_n \alpha_k}{\sinh \bar{t}_n} + \alpha_k \bar{t}_n (1-\nu) \cosh \bar{t}_n \alpha_k \right\} \cos \pi \beta_j \\
D^{kl} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{mn}}{K_{mn}} \sin \pi \alpha_k \sin \pi \beta_l \\
E^{kl} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi F_{mn}}{K_{mn}} \cos \pi \alpha_k \sin \pi \beta_l \\
F^{kl} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi F_{mn}}{K_{mn}} \sin \pi \alpha_k \cos \pi \beta_l
\end{aligned} \tag{10}$$

次に辺 AC および BD におけるたわみ角は一般に y のみの関数であるゆえ次のごとく正弦フーリエ級数で表わすこととする。 $\theta_a(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{an} \sin \beta_n y$, $\theta_b(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{bn} \sin \beta_n y$ (11)

他方、式(7)の第一次微係数 $\frac{\partial w}{\partial x}$ をとり、辺 AC および BD の座標値を代入すれば、それぞれの辺におけるたわみ角がえられるゆえ、これらを式(11)と等置して演算のうえ整理すれば次のとき、 θ_{an} , θ_{bn} と R_{ij} , M_{ij}^x , M_{ij}^y , M_{an} , M_{bn} , $\bar{S}_{an}$, $\bar{S}_{bn}$ との関係式がえられる。

$$\left. \begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (R_{ij} \bar{D}_{ij}(n) - \frac{\pi}{4} M_{ij}^x \bar{D}_{xij}(n) - \frac{\pi}{8} M_{ij}^y \bar{D}_{yij}(n)) + M_{an} \bar{D}_{an} + M_{bn} \bar{D}_{bn} + \bar{S}_{an} \bar{D}_{an} + \bar{S}_{bn} \bar{D}_{bn} &= \frac{a^2}{4} \bar{D}_a(n) - \frac{a^2 b D \pi^3}{4} \theta_{an} \\
\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (R_{ij} \bar{D}_{ij}(n) - \frac{\pi}{4} M_{ij}^x \bar{D}_{xij}(n) - \frac{\pi}{8} M_{ij}^y \bar{D}_{yij}(n)) + M_{an} \bar{D}_{an} + M_{bn} \bar{D}_{bn} + \bar{S}_{an} \bar{D}_{an} + \bar{S}_{bn} \bar{D}_{bn} &= \frac{a^2}{4} \bar{D}_b(n) - \frac{a^2 b D \pi^3}{4} \theta_{bn}
\end{aligned} \right\} \tag{12}$$

ここに $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\left. \begin{aligned}
\bar{D}_{ij}(n) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi}{K_{mn}} \sin \pi \alpha_i \sin \pi \beta_j \\
\bar{D}_{xij}(n) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{K_{mn}} \cos \pi \alpha_i \sin \pi \beta_j \\
\bar{D}_{yij}(n) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi \pi}{K_{mn}} \sin \pi \alpha_i \cos \pi \beta_j \\
\bar{D}_{an} &= \frac{a^2 b \pi^3}{8 \sinh \bar{t}_n} \left(\frac{1}{\sinh \bar{t}_n} - \frac{\cosh \bar{t}_n}{\bar{t}_n} \right) \\
\bar{D}_{bn} &= \frac{a^2 b \pi^3}{8 \sinh \bar{t}_n} \left(\frac{\cosh \bar{t}_n}{\sinh \bar{t}_n} - \frac{1}{\bar{t}_n} \right) \\
\bar{D}_{an}' &= \frac{a b D \pi^3 \bar{t}_n}{8 \sinh \bar{t}_n} \left\{ \frac{\bar{t}_n (1-\nu)}{\sinh \bar{t}_n} + (1+\nu) \cosh \bar{t}_n \right\} \\
\bar{D}_{bn}' &= - \frac{a b D \pi^3 \bar{t}_n}{8 \sinh \bar{t}_n} \left\{ 1+\nu + \frac{\bar{t}_n (1-\nu) \cosh \bar{t}_n}{\sinh \bar{t}_n} \right\} \\
\bar{D}_a(n) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi F_{mn}}{K_{mn}} \\
\bar{D}_b(n) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi (-1)^m F_{mn}}{K_{mn}} \\
\bar{D}_{ij}(n) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi (-1)^m}{K_{mn}} \sin \pi \alpha_i \sin \pi \beta_j \\
\bar{D}_{xij}(n) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^2 (-1)^m}{K_{mn}} \cos \pi \alpha_i \sin \pi \beta_j \\
\bar{D}_{yij}(n) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi \pi (-1)^m}{K_{mn}} \sin \pi \alpha_i \cos \pi \beta_j \\
\bar{D}_{an} &= \frac{a^2 b \pi^3}{8 \sinh \bar{t}_n} \left(\frac{\cosh \bar{t}_n}{\sinh \bar{t}_n} - \frac{1}{\bar{t}_n} \right) \\
\bar{D}_{bn} &= \frac{a^2 b \pi^3}{8 \sinh \bar{t}_n} \left(\frac{\cosh \bar{t}_n}{\sinh \bar{t}_n} - \frac{\cosh \bar{t}_n}{\bar{t}_n} - \sinh \bar{t}_n \right) \\
\bar{D}_{an}' &= \frac{a b D \pi^3 \bar{t}_n}{8 \sinh \bar{t}_n} \left\{ \frac{\bar{t}_n (1-\nu) \cosh \bar{t}_n}{\sinh \bar{t}_n} + 1+\nu \right\} \\
\bar{D}_{bn}' &= - \frac{a b D \pi^3 \bar{t}_n}{8 \sinh \bar{t}_n} \left\{ \frac{\bar{t}_n (1-\nu)}{\sinh \bar{t}_n} + (1+\nu) \cosh \bar{t}_n \right\} \\
\bar{D}_a(n) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi (-1)^m F_{mn}}{K_{mn}}
\end{aligned} \right\} \tag{13}$$

式(9)および式(12)が本題の無梁板を解析するための基本連立方程式であり、これら諸式における未知数のうち V_{ke} , M_{ke}^x , M_{ke}^y と α^{ke} , θ_a^{ke} , θ_b^{ke} のいずれか一方が、例えば中間支柱の垂直変位がなければ $\alpha^{ke} = 0$, また中間支柱がなければ $V_{ke} = 0$, $M_{ke}^x = M_{ke}^y = 0$ 等の条件を含めて他の条件より明らかになれば、連立方

程式の数と未知数の数が一致し、したがって、これら諸式を連立にとけば本題の無梁板が解析できることになる。

3. 計算例

図-2 に示すごとく辺 AB, BD, CD で単純支持され辺 AC が固定される無梁板に等分布荷重が満載される場合の計算例を示せば次のとおりである。板周辺および中間支柱の垂直変位がない場合は、 $\delta_{An} = \delta_{Bn} = 0$ 、 $d'' = d' = d^2 = d^3 = 0$ であり、また $\theta_{An} = 0$ 、 $M_{Bn} = 0$ であるから式(9)および式(13)に示す基本連立方程式は次の内容となる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (R_{ij} D_{ij}^{kl} - \frac{\pi}{2} M_{ij}^x D_{xij}^{kl} - \frac{\pi}{8} M_{ij}^y D_{yij}^{kl}) + \sum_{n=1}^3 M_{An} D_{An}^{kl} &= \frac{a^6}{4} D^{kl} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (R_{ij} E_{ij}^{kl} - \frac{\pi}{2} M_{ij}^x E_{xij}^{kl} - \frac{\pi}{8} M_{ij}^y E_{yij}^{kl}) + \sum_{n=1}^3 M_{An} E_{An}^{kl} &= \frac{a^3}{4} E^{kl} - \frac{a^6}{4} D \pi^2 \theta_x^{kl} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (R_{ij} F_{ij}^{kl} - \frac{\pi}{2} M_{ij}^x F_{xij}^{kl} - \frac{\pi}{8} M_{ij}^y F_{yij}^{kl}) + \sum_{n=1}^3 M_{An} F_{An}^{kl} &= \frac{a^3}{4} F^{kl} - \frac{a^6}{4} D \pi^2 \theta_y^{kl} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (R_{ij} D_{ij}^{(n)} - \frac{\pi}{2} M_{ij}^x D_{xij}^{(n)} - \frac{\pi}{8} M_{ij}^y D_{yij}^{(n)}) + M_{An} D_{An}^{(n)} &= -\frac{a^6}{4} D_{An}^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ただし $k=1, 2 \quad l=1, 2$

$n=1, 2, 3 \text{-----}$

また中間支柱の x および y 方向の各端モーメントとたわみ角の関係は既往のはり理論におけるたわみ角式により次のごとくえられる。 $M_{k\ell}^x = -\frac{4E_x I_{k\ell}}{\lambda_{k\ell}} \theta_x^{k\ell}$ 、 $M_{k\ell}^y = -\frac{4E_y I_{k\ell}}{\lambda_{k\ell}} \theta_y^{k\ell}$ (15) いま、柱および板の弾性係数 E_x, E_y, E_p が全て等しく、柱の断面は一边が $\frac{a}{24}$ なる正方形とし、 $\nu=0.3$ 、 $A_{k\ell} = \frac{a^2}{4}$ 、 $t = \frac{a}{100}$ 、 $\alpha=0.5$ の場合について各係数および荷重項を算出のうえ上記基本連立方程式を解けば次の結果をうる。

$$\left. \begin{aligned} R_{11} = R_{12} &= 0.481 \times \frac{Pa^2}{8} & R_{21} = R_{22} &= 0.521 \times \frac{Pa^2}{8} \\ M_{11}^x = M_{12}^x &= -0.00014 \times \frac{Pa^3}{8} & M_{21}^x = M_{22}^x &= -0.00600 \times \frac{Pa^3}{8} \\ M_{11}^y = -M_{12}^y &= 0.0180 \times \frac{Pa^3}{8} & M_{21}^y = -M_{22}^y &= 0.00509 \times \frac{Pa^3}{8} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

また同時に求めた M_{An} を式(4)に代入して固定辺 AC における端モーメント $M_A(y)$ の分布を求めれば図-3 に示すごとくえられる。

4. 結 語

本研究によって表題に示す無梁板の解析が可能となつたが、さらに同様の手法によって他の周辺支持条件をもつ無梁板や一方向あるいは二方向に連続する無梁板の解析も可能であり、さらにはそれらの影響面解析も行うことが出来、これらについては逐次発表の予定である。

本研究には文部省科学研究費の補助をうけた。記して謝意を表する。

文献 (1) 山崎、樗木：周辺で単純支持される無梁板の解法 土木学会論文集 第136号 昭和41年12月

(2) 山崎、樗木、今岡：無梁板の解法（一対辺が固定または単純支持されかつ中間柱にて点支持される場合）

土木学会西部支部研究発表会論文集 昭和42年1月

(3) 例えは K. Greim: *Piltzdecken Theorie und Berechnung*, Berlin 1948 Wilhelm Ernst & Sohn

Leue: *Piltzdecken und andere tr gerlose Eisenbetondecken*, 2. Aufl.

Berlin 1926 Wilhelm Ernst & Sohn B. & C.

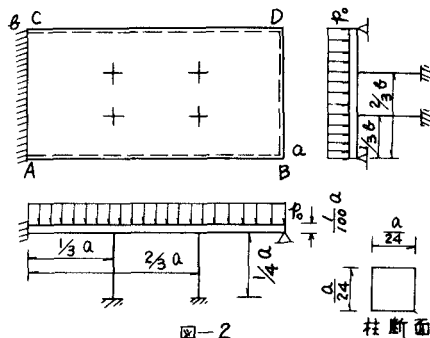


図-2

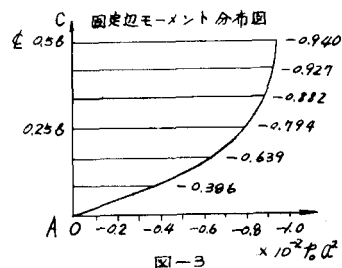


図-3