

九州大学 工学部 正員 山崎 徳也

" " " 専任 木 武

大学院 学生員 〇山田 長四夫

1. 緒言

板周辺において板と柱とが直交して剛結する構造物は、土木、建築の各分野でわれわれの多く見うけるところである。著者らは先に一対辺が単軸支持され、他対辺が任意の間隔でならば柱にて支持される等方性矩形板に、任意垂直荷重が作用する場合の解法を発表したが、本研究はその総称として矩形板が直交異方性である場合の厳密理論解法を提示せんとするものである。

2. 解法

一般に板と直交して直結する柱には、板から垂直反力、水平反力、曲げモーメントおよびねじりモーメントが伝えられるが、本論文では文献(1)と同様に垂直反力のみが伝えられる場合について述べることにする。

(1) 板の弾性曲面

図-1に示すごとく、矩形板 $ABCD$ において、 A を原点とし辺 AB および辺 AC に沿ってそれぞれ x 軸、 y 軸をとり、紙面に直交して z 軸を立つ直交座標系 (x, y, z) を導入する。板 $ABCD$ は辺 AB , CD で単軸支持され、また辺 AC が r 個の中間支点 ($i=1, 2, 3, \dots, r$) で、辺 BD が s 個の中間支点 ($j=1, 2, 3, \dots, s$) で点支持されるものとする。周知のごとく直交異方性板の基礎微分方程式は次式であらわされる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) W = \frac{p(x, y)}{D_x} \quad (1)$$

$$\text{ただし } K_1^2 = \bar{K}^2 + \sqrt{\bar{K}^4 - K^2}, \quad K_2^2 = \bar{K}^2 - \sqrt{\bar{K}^4 - K^2}, \quad K^2 = \frac{D_y}{D_x}, \quad \bar{K}^2 = \frac{1}{2}(\nu_y + K^2 \nu_x + \frac{4C}{D_x}), \quad D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \quad C = \frac{G h^3}{12}, \quad E_x, E_y; x, y \text{ 方向の縦弾性係数}, \quad \nu_x, \nu_y; x, y \text{ 方向のポアッソン比}$$

$$G; \text{せん断弾性係数}, \quad h; \text{板の厚さ}, \quad W; \text{板の垂直たわみ}(z \text{ 軸方向を正とする})$$

$$p(x, y); \text{板に作用する任意垂直荷重強度}, \quad a; \text{辺 } AB, CD \text{ の長さ}, \quad b; \text{辺 } AC, BD \text{ の長さ}$$

ところで辺 AB , CD の境界条件は次のとおりで

ある。

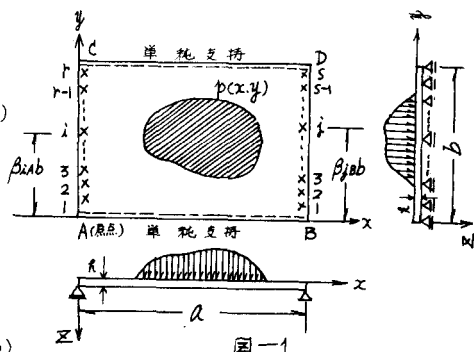
$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ で } (W)_{y=0} &= 0, \quad M_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0 \\ y=b \text{ で } (W)_{y=b} &= 0, \quad M_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

板に $p(x, y)$ なる任意垂直荷重が作用し、かつ式

(2)の境界条件を満足するような板の弾性曲面 W は次式であらわされる。

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sinh K_1 \beta_n x + B_m \cosh K_1 \beta_n x + C_m \sinh K_2 \beta_n x + D_m \cosh K_2 \beta_n x + \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \sin \alpha_m x) \sin \beta_n y \quad (3)$$

$$\text{ただし } \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad T_{mn} = \frac{G_{mn}}{D_x(\alpha_m^2 + K_1^2 \beta_n^2)(\alpha_m^2 + K_2^2 \beta_n^2)}, \quad G_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y dx dy$$



A_n, B_n, C_n, D_n は積分常数

積分常数 $A_n \sim D_n$ は $x=0, a$ における辺 AC, BD の境界条件を満足するように決定すればよく、板から柱に伝えられる反力を正弦フーリエ級数にてあらわせば、次の境界条件式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で } M_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0, & V_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(\nu_y + \frac{4C}{D_x} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{An} \sin \beta_n y \\ x=a \text{ で } M_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0, & V_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(\nu_y + \frac{4C}{D_x} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{An} \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} (4)$$

ただし V_{An}, V_{Bn} ; 任意常数

他方、辺 AC の各中間支点の座標値をそれぞれ $(0, \beta_{1A}b), (0, \beta_{2A}b), \dots, (0, \beta_{iA}b), \dots, (0, \beta_{rA}b)$ とし、各中間支点に生ずる垂直反力を $R_1^A, R_2^A, \dots, R_i^A, \dots, R_r^A$ とすると、これらを $0 \leq y \leq b$ なる変域にて正弦フーリエ級数に展開すれば次式のごとくなる。

$$\bar{R}_1^A = \sum_{n=1}^{\infty} R_{1n}^A \sin \beta_n y, \quad \bar{R}_2^A = \sum_{n=1}^{\infty} R_{2n}^A \sin \beta_n y, \quad \dots, \quad \bar{R}_i^A = \sum_{n=1}^{\infty} R_{in}^A \sin \beta_n y, \quad \dots, \quad \bar{R}_r^A = \sum_{n=1}^{\infty} R_{rn}^A \sin \beta_n y \quad (5)$$

ただし $R_{1n}^A = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2}{b} \int_{\beta_{A(b-\Delta)}^{\beta_{A(b+\Delta)}} \frac{R_1^A}{2\Delta} \sin \beta_n y dy = \frac{2}{b} R_1^A \sin \pi \beta_{1A}, R_{2n}^A = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2}{b} \int_{\beta_{2(b-\Delta)}^{\beta_{2(b+\Delta)}} \frac{R_2^A}{2\Delta} \sin \beta_n y dy = \frac{2}{b} R_2^A \sin \pi \beta_{2A},$

$$\dots, R_{in}^A = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2}{b} \int_{\beta_{i(b-\Delta)}^{\beta_{i(b+\Delta)}} \frac{R_i^A}{2\Delta} \sin \beta_n y dy = \frac{2}{b} R_i^A \sin \pi \beta_{iA}, \dots, R_{rn}^A = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2}{b} \int_{\beta_{r(b-\Delta)}^{\beta_{r(b+\Delta)}} \frac{R_r^A}{2\Delta} \sin \beta_n y dy = \frac{2}{b} R_r^A \sin \pi \beta_{rA}$$

ここに R_i^A は R_i^A の正弦フーリエ級数展開式を意味し [FL-] の次元をもつ。

辺 AC の全反力 V_A は、上記各中間支点の垂直反力の総和でえられるから式(4)の任意常数 V_{An} として次式が導かれる。

$$V_{An} = \frac{2}{b} \sum_{i=1}^r R_i^A \sin \pi \beta_{iA} \quad (6)$$

同様に辺 BD における各中間支点の反力をそれぞれ $R_1^B, R_2^B, \dots, R_i^B, \dots, R_s^B$ とすれば、式(4)の任意常数 V_{Bn} 以下のごとく求められる。

$$V_{Bn} = -\frac{2}{b} \sum_{j=1}^s R_j^B \sin \pi \beta_{jB} \quad (7)$$

次に式(3)を式(4)に代入すれば、次のごとく連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} (K_1^2 - \nu_y) B_n + (K_2^2 - \nu_y) D_n &= 0 \\ K_1 \{ K_1^2 - (\nu_y + \frac{4C}{D_x}) \} A_n + K_2 \{ K_2^2 - (\nu_y + \frac{4C}{D_x}) \} C_n &= \frac{1}{\beta_n^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} R_{mn} - \frac{V_{An}}{D_x} \right) \\ (K_1^2 - \nu_y) (A_n \sinh K_1 \delta_n + B_n \cosh K_1 \delta_n) + (K_2^2 - \nu_y) (C_n \sinh K_2 \delta_n + D_n \cosh K_2 \delta_n) &= 0 \\ K_1 \{ K_1^2 - (\nu_y + \frac{4C}{D_x}) \} (A_n \cosh K_1 \delta_n + B_n \sinh K_1 \delta_n) + K_2 \{ K_2^2 - (\nu_y + \frac{4C}{D_x}) \} (C_n \cosh K_2 \delta_n + D_n \sinh K_2 \delta_n) &= \frac{1}{\beta_n^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m R_{mn} - \frac{V_{Bn}}{D_x} \right) \\ \delta_n = \frac{\pi a}{b} = \beta_n a, & \quad R_{mn} = \{ \alpha_m^2 + (\nu_y + \frac{4C}{D_x}) \beta_n^2 \} \alpha_m T_{mn} \end{aligned} \right\} (8)$$

式(8)を連立に解けば $A_n \sim D_n$ が次式のごとく求まる。

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{S_A} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} R_{mn} - \frac{V_{An}}{D_x} \right) E_A + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m R_{mn} - \frac{V_{Bn}}{D_x} \right\} F_A \right], & B_n &= \frac{1}{S_A} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} R_{mn} - \frac{V_{An}}{D_x} \right) G_A + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m R_{mn} - \frac{V_{Bn}}{D_x} \right\} H_A \right] \\ C_n &= \frac{1}{S_A} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} R_{mn} - \frac{V_{An}}{D_x} \right) I_A + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m R_{mn} - \frac{V_{Bn}}{D_x} \right\} J_A \right], & D_n &= \frac{1}{S_A} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} R_{mn} - \frac{V_{An}}{D_x} \right) K_A + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m R_{mn} - \frac{V_{Bn}}{D_x} \right\} L_A \right] \end{aligned} \right\} (9)$$

ただし

$$\begin{aligned} S_A &= (a_2 \frac{b^2}{b_2} + \frac{a_1^2}{a_2^2} b_2) \sinh K_1 \delta_n \sinh K_2 \delta_n - 2a_1 b_1 \cosh K_1 \delta_n \cosh K_2 \delta_n + 2a_1 b_1 \\ E_A &= \frac{1}{\beta_n^2} \left(\frac{a_1}{a_2} b_2 \sinh K_1 \delta_n \sinh K_2 \delta_n - b_1 \cosh K_1 \delta_n \cosh K_2 \delta_n + b_1 \right), & F_A &= \frac{1}{\beta_n^2} \cdot b_1 (\cosh K_1 \delta_n - \cosh K_2 \delta_n) \\ G_A &= \frac{1}{\beta_n^2} \left(b_1 \sinh K_1 \delta_n \cosh K_2 \delta_n - \frac{a_1}{a_2} b_2 \sinh K_2 \delta_n \cosh K_1 \delta_n \right), & H_A &= \frac{1}{\beta_n^2} (-b_1 \sinh K_1 \delta_n + \frac{a_1}{a_2} b_2 \sinh K_2 \delta_n) \\ I_A &= \frac{1}{\beta_n^2} \left(\frac{b_1^2}{b_2^2} \sinh K_1 \delta_n \sinh K_2 \delta_n - \frac{a_1}{a_2} b_1 \cosh K_1 \delta_n \cosh K_2 \delta_n + \frac{a_1}{a_2} b_1 \right), & J_A &= \frac{1}{\beta_n^2} \left(-\frac{a_1}{a_2} b_1 (\cosh K_1 \delta_n - \cosh K_2 \delta_n) \right) \\ K_A &= \frac{1}{\beta_n^2} \left(-\frac{b_1^2}{b_2^2} \sinh K_1 \delta_n \cosh K_2 \delta_n + \frac{a_1}{a_2} b_1 \sinh K_2 \delta_n \cosh K_1 \delta_n \right), & L_A &= \frac{1}{\beta_n^2} \left(\frac{b_1^2}{b_2^2} \sinh K_1 \delta_n - \frac{a_1}{a_2} b_1 \sinh K_2 \delta_n \right) \\ a_0 &= K_1 \{ K_1^2 - (\nu_y + \frac{4C}{D_x}) \}, & a_2 &= K_2 \{ K_2^2 - (\nu_y + \frac{4C}{D_x}) \}, & b_1 &= K_1^2 - \nu_y, & b_2 &= K_2^2 - \nu_y \end{aligned}$$

式(4)を式(3)に代入すれば図-1に示す弾性曲面 W がえられ、次の内容となる。

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{m=1}^{\infty} R_{mn} - \frac{V_{0n}}{D_x} \right) \Phi_n + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m R_{mn} - \frac{V_{0n}}{D_x} \right\} \Omega_n + \sum_{m=1}^{\infty} T_{mn} \sin \alpha_m x \right\} \sin \beta_n y \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし} \quad \Phi_n &= \frac{1}{S_a} (F_a \sinh K_1 \beta_n x + G_a \cosh K_1 \beta_n x + I_a \sinh K_2 \beta_n x + K_a \cosh K_2 \beta_n x) \\ \Omega_n &= \frac{1}{S_a} (F_a \sinh K_1 \beta_n x + H_a \cosh K_1 \beta_n x + J_a \sinh K_2 \beta_n x + L_a \cosh K_2 \beta_n x) \end{aligned}$$

(2) 基本連立方程式の誘導

辺 AC 、 BD の各中間支点がそれぞれ $d_{1A}, d_{2A}, \dots, d_{rA}, \dots, d_{rA}$ および $d_{1B}, d_{2B}, \dots, d_{sB}, \dots, d_{sB}$ なる垂直変位 (Z 軸の正の向きを正とする) を与えるものとする。しかるとき板の弾性曲面 W は各中間支点においてこれら中間支点の垂直変位に等しくなければならないことより次のごとき変形条件式を与える。

$$(W)_{x=0} = d_{rA} \quad (r=1, 2, 3, \dots, r), \quad (W)_{x=a} = d_{sB} \quad (s=1, 2, 3, \dots, s) \quad (11)$$

$$y = \beta_{rAb} \quad y = \beta_{sBb}$$

式(11)に式(10)を代入し、かつ V_{0A}, V_{0B} として式(6)、(7)を用いて演算のうえ整理すれば、矩形板を支える各中間支点反力を求めるための基本連立方程式が次のごとくえられる。

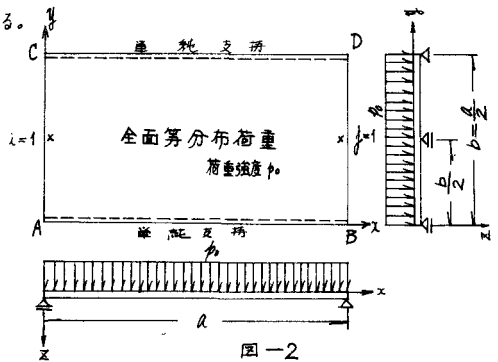
$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_n^0 \sin \pi \beta_{1A} \sin \pi \beta_{rA} \cdot R_{1A} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^0 \sin \pi \beta_{jB} \sin \pi \beta_{rA} R_{jB} \\ = \frac{D_x b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ \Phi_n^0 + (-1)^m \Omega_n^0 \} R_{mn} \sin \pi \beta_{rA} - d_{rA} \quad (r=1, 2, 3, \dots, r) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_n^A \sin \pi \beta_{1A} \sin \pi \beta_{sB} \cdot R_{1A} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^A \sin \pi \beta_{jB} \sin \pi \beta_{sB} \cdot R_{jB} \\ = \frac{D_x b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ \Phi_n^A + (-1)^m \Omega_n^A \} R_{mn} \sin \pi \beta_{sB} - d_{sB} \quad (s=1, 2, 3, \dots, s) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし} \quad \Phi_n^0 &= (\Phi_n)_{x=0} = \frac{1}{S_a} \left(\frac{b_1 - b_2}{\beta_n^2} \right) \left(-\frac{b_1}{b_2} \sinh K_1 \beta_n \cosh K_2 \beta_n + \frac{a_1}{a_2} \sinh K_2 \beta_n \cosh K_1 \beta_n \right), \quad \Phi_n^A = (\Phi_n)_{x=a} = -\Omega_n^0 \\ \Omega_n^0 &= (\Omega_n)_{x=0} = \frac{1}{S_a} \left(\frac{b_1 - b_2}{\beta_n^2} \right) \left(\frac{b_1}{b_2} \sinh K_1 \beta_n - \frac{a_1}{a_2} \sinh K_2 \beta_n \right), \quad \Omega_n^A = (\Omega_n)_{x=a} = -\Phi_n^0 \end{aligned}$$

式(12)は支点反力と同数の連立方程式となるゆえ、これらを連立に解けば未知不静定反力 R_i^A ($i=1, 2, 3, \dots, r$), R_j^B ($j=1, 2, 3, \dots, s$) がすべて明らかとなり、その結果を式(6)、(7)に代入しさらに式(10)に代入すれば、板の弾性曲面がえられることとなる。

3. 計算例

図-2に示すごとく辺 AB 、 CD で単純支持され、かつ辺 AC 、 BD の二等分点で点支持される矩形板に荷重強度 p_0 なる均分布荷重が満載される場合の計算例を示せば次のとおりである。すなわち中間支点の支点変位がないものとすれば、 $d_{1A} = d_{1B} = 0$ となるゆえ式(12)に示す基本連立方程式は次の内容となる。



$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^0 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} R_{1A} - \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^0 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} R_{1B} &= \frac{D_x b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ \Phi_n^0 + (-1)^m \Omega_n^0 \} R_{mn} \sin \frac{\pi}{2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^A \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} R_{1A} - \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^A \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} R_{1B} &= \frac{D_x b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ \Phi_n^A + (-1)^m \Omega_n^A \} R_{mn} \sin \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

板のスパン比を $\frac{b}{a} = 0.5$ とし、また x, y 方向の板剛度 D_x, D_y の比を $\frac{D_y}{D_x} = 1.5$ 、さらに $\nu = 0.15$ とすれば、式(13)の諸係数および諸荷重項が次値のごとく算定される。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^0 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^0 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 0.26235 \times 10^{-2} a^3 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^0 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^A \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -0.32501 \times 10^{-4} a^3 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\frac{Dxb}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\Phi_n^2 + (-1)^n \Omega_n^2 \right) R_{mn} \sin \frac{n\pi}{2} \\ = \frac{Dxb}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\Phi_n^2 + (-1)^n \Omega_n^2 \right) R_{mn} \sin \frac{n\pi}{2} = 0.15031 \cdot 10^3 p_0 a^2$$

式(14)を式(13)に代入し、これらを連立に解けば各中間支点反力 R_{1A} , R_{1B} が求まり次のごとくなる。

$$R_{1A} = R_{1B} = 0.56599 \cdot 10^3 p_0 a^2 \quad (15)$$

式(15)を式(6),(7)に代入してえられる結果を式(10)に代入すれば板の弾性曲面が求められることとなり、

$\eta = \frac{b}{2}$, $\chi = \frac{a}{2}$ および $\chi = 0$ (即ち $\chi = a$) 断面のたわみ w を計算すれば図-3に示す結果となり、また $\chi = 0$ (即ち $\chi = a$) 断面の η 方向のモーメント M_η を求めれば、図-4のごとくなる。なお図-3および図-4には中間支点がない場合、すなわち一対辺が単純支持され、他対辺が自由である矩形板に等分布荷重が満載された場合の板のたわみ w , および η 方向のモーメント M_η を点線と示し両者を比較対照した。

4. 結語

本法によれば板を支える各中間支点の不静定反力は、式(12)の多元連立一次方程式を解くのみで簡単に求めることができ、さらに式(12)の係数および荷重項をあらかじめ計算のうえ図表化しておけば、本題の構造物を解くことは連続ばりやラーメン等の骨組構造物を解くのと変りない労力とを要することとなり極めて実用的である。

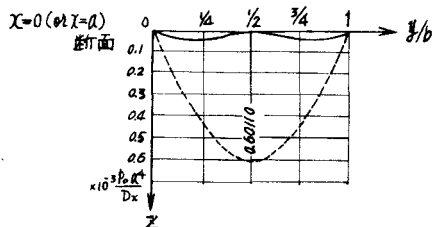
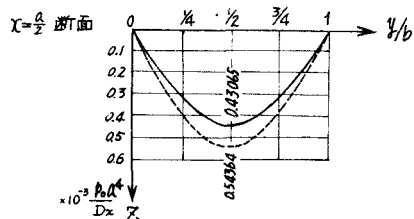
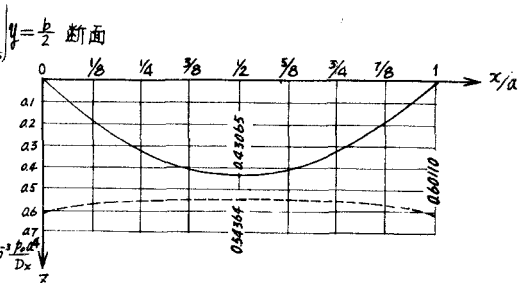
本研究で省略した柱の反力モーメントを考慮した場合の解析、さらに反力および板の諸変位、諸断面力などの影響面解析も可能であり、また本法と同様の手法によって全周辺が点支持される矩形板を解くこともでき、これらについては逐次発表の予定である。

本研究には文部省科学研究費の補助をうけた。記して謝意を表する。

参考文献

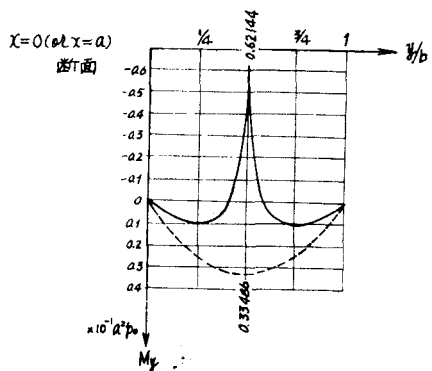
- (1) 山崎 徳也、樗木武、山田喜四夫；一対辺が点支持され他対辺が単純支持される矩形板の解法

土木学会西部支部研究発表会 昭和42年1月



実線；中間支点がある場合
点線； “ がない場合

図-3. たわみ(w)図 ($\frac{b}{a} = 0.5$)



・ 実線；中間支点がある場合
点線； “ がない場合

図-4. η 方向のモーメント (M_η) 図 ($\frac{b}{a} = 0.5$)