

大阪工業大学

正員 岡村宏一

大阪設計コンサルタンツKK ○正員 吉田公寛

I) まえがき: 全周辺が完全自由な矩形床板が柱と剛結した形式の無梁板は、有限領域の無梁板構造のうち最も一般的な形態のものであるが、従来あまり取扱はれていないようである。この種の構造の特徴として、荷重あるいは柱頭部等の条件によって2次元解析では充分の評価を与えることが出来ない。われわれはこの構造に対する立体的解析法を提示し、本文では正対称系および一方正対称他方向非対称の曲げの場合について計算例を示して報告する。

II) 解法の概要: 矩形床板には柱頭部に分布する支持力ならびに2方向の拘束モーメントを用いて、隅角を含めた周辺の反力0なる解式を与える。次に周辺に残存するモーメントを除去するために境界選定法¹⁾を利用する解式を重ねて解法を簡易化する。また場合により周辺に存在するモーメントの卓越部分を打消す関数を加え最後にさらに残存するモーメントと境界選定法により消去する。以上の解式を用いて、柱頭に於ける支持条件式ならびに2方向の節点方程式を作成する。完全に非対称な場合にはこれに3系統するわち床板の各方向水平移動ならびに回転に対する面内作用力の釣合いによる層方程式が累加される。

III) 解式

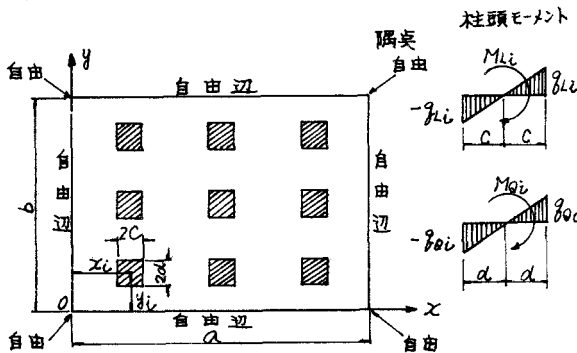


図-1

柱頭部反力は局部的応力集中を無視して分布形を図の様に仮定する。

x方向拘束モーメント: M_{Lx}

柱巾2d区間に等分布

y方向拘束モーメント: M_{Ly}

柱巾2c区間に等分布

柱頭支持力: P_i

柱頭支持面に等分布。

前記のようにして求めた床板のたわみ W は若干の場合に於て次式のように表示される。

i) 正対称の場合

$$\begin{aligned}
 W = W_0 + \frac{qb^4}{D\pi^3} \left\{ \lambda^4 \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left\{ a_m P_a - \sum_{n=2,4,6}^{\infty} b_n P_i + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} c_n M_{Lx} \right\} \left\{ \cos m\pi\xi - \frac{(m\pi)^2}{2} \xi(1-\xi) \right\} + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left\{ a_n P_a \right. \right. \\
 - \sum_{n=2,4,6}^{\infty} b_n P_i + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} c_n M_{Ly} \left\{ \cos n\pi\eta - \frac{(n\pi)^2}{2} \eta(1-\eta) \right\} + \frac{2\lambda^4}{\pi} \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)} \left\{ d_{mn} P_a - \sum_{n=2,4,6}^{\infty} e_{mn} P_i + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} f_{mn} M_{Lx} \right. \\
 + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} g_{mn} M_{Ly} \left\{ \cos m\pi\xi \cos n\pi\eta + \frac{2\lambda^2}{\pi} \left\{ (Y_A + \frac{S\pi}{\lambda} \eta_i) \cosh \frac{S\pi}{\lambda} \eta_i + (Y_C + Y_B \cdot \frac{S\pi}{\lambda} \eta_i) \sinh \frac{S\pi}{\lambda} \eta_i \right\} \right. \\
 \times A_S \cos S\pi\xi + \frac{2\lambda^2}{\pi} \left\{ (Y_A + \lambda S\pi\xi_i) \cosh \lambda S\pi\xi_i + (Y_C + Y_B \cdot \lambda S\pi\xi_i) \sinh \lambda S\pi\xi_i \right\} \\
 \left. \left. \times A'_S \cos S'\pi\eta \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

P_a : 作用荷重強度, a_m, a_n, d_{mn} 与えられた荷重により決まる。

1) 岡村: 異形平板の境界値問題に対する選定法の応用について, 大阪工大紀要, Vol.8, No.2 (1962)

各方向展開係数 $b_m = \beta \cos m\pi \xi_i \sin m\pi d$ $b_n = \alpha \cos n\pi \eta_i \sin n\pi \beta$

$$C_m = \frac{3}{4(\lambda\alpha)^2 b^3} (\cos m\pi d - \frac{1}{\alpha m\pi} \sin m\pi d) \sin m\pi \xi_i \quad C_n = \frac{3}{4\lambda\beta^2 b^3} (\cos n\pi \beta - \frac{1}{\beta n\pi} \sin n\pi \beta) \sin n\pi \eta_i$$

$$e_{mn} = \cos m\pi \xi_i \sin m\pi d \cos n\pi \eta_i \cos n\pi \beta$$

$$f_{mn} = \frac{3}{4\beta(\lambda\alpha)^2 b^3} (\cos m\pi d - \frac{1}{\alpha m\pi} \sin m\pi d) \sin n\pi \beta \sin m\pi \xi_i \cos n\pi \eta_i$$

$$g_{mn} = \frac{3}{4\alpha\lambda\beta^2 b^3} (\cos n\pi \beta - \frac{1}{\beta n\pi} \sin n\pi \beta) \sin m\pi d \sin n\pi \eta_i \cos m\pi \xi_i$$

$$\varphi_{AS} = \frac{1 + \cosh \frac{S\pi}{\lambda}}{\sinh \frac{S\pi}{\lambda}} \left(\frac{S\pi}{\lambda \sinh \frac{S\pi}{\lambda}} + 3 \right) \quad \varphi_{BS} = - \frac{1 + \cosh \frac{S\pi}{\lambda}}{\sinh \frac{S\pi}{\lambda}} \quad \varphi_{CS} = -3$$

$$\varphi'_{AS} = \frac{1 + \cosh \lambda S\pi}{\sinh \lambda S\pi} \left(\frac{S\pi}{\sinh \lambda S\pi} + 3 \right) \quad \varphi'_{BS} = - \frac{1 + \cosh \lambda S\pi}{\sinh \lambda S\pi} \quad \varphi'_{CS} = -3$$

但し $\lambda = a/b$, $d = c/a$, $\beta = d/b$, r, r' は x, y 方向自由辺に採った選点の数を示す。

ii) x 方向正対称 y 方向逆対称の場合

正対称系たわみ式より, $W_0 = 0$, * 及び ** 関数を除去, $n = 1, 3, 5 \dots \infty$, $S' = 1, 3, 5 \dots (2r'-1)$ に変更, さらに φ_{AS} , φ_{BS} , φ_{CS} を次の様に変更する。

$$\varphi_{AS} = \frac{1 - \cosh \frac{S\pi}{\lambda}}{\sinh \frac{S\pi}{\lambda}} \left(-\frac{S\pi}{\sinh \frac{S\pi}{\lambda}} - 3 \right) \quad \varphi_{BS} = \frac{1 - \cosh \frac{S\pi}{\lambda}}{\sinh \frac{S\pi}{\lambda}} \quad \varphi_{CS} = -3$$

以上のたわみ式を用いて次の様な連立解式を形成する。

1) 自由辺に残留するモーメントを除去する境界選点 $(x_j, 0)$ $(0, y_j)$ における解式

i) 正対称の場合

$$(0, y_j) - \frac{2r}{S=2,4,\dots} \frac{S^2}{\lambda^2} \left\{ (\varphi_{AS} + \frac{S\pi}{\lambda} \eta_j) \cos \frac{S\pi}{\lambda} \eta_j + (\varphi_{CS} + \varphi_{BS} \frac{S\pi}{\lambda} \eta_j) \sinh \frac{S\pi}{\lambda} \eta_j \right\} A_S$$

$$+ \sum_{S=2,4,\dots}^{2r'} S' (\varphi'_{AS} + 2\varphi'_{BS}) A_S' \cos S'\pi \eta_j - \frac{2\lambda^2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} n (d m n P_a - \sum_i e_{mn} P_i + \sum_i f_{mn} M_{Li}$$

$$+ \sum_i g_{mn} M_{Qi}) \cos n\pi \eta_j = 0$$

$$(x_j, 0) - \frac{2r'}{S=2,4,\dots} S^2 \left\{ (\varphi'_{AS} + \lambda S'\pi \xi_j) \cosh \lambda S'\pi \xi_j + (\varphi'_{CS} + \varphi'_{BS} \lambda S'\pi \xi_j) \sinh \lambda S'\pi \xi_j \right\}$$

$$\times A_S' + \sum_{S=2,4,\dots}^{2r} S^2 \lambda^2 (\varphi_{AS} + 2\varphi_{BS}) A_S \cos S\pi \xi_j - \frac{2\lambda^4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} m (d m n P_a - \sum_i e_{mn} P_i$$

$$+ \sum_i f_{mn} M_{Li} + \sum_i g_{mn} M_{Qi}) \cos m\pi \xi_j = 0$$

ii) x 方向正対称 y 方向逆対称の場合

$(0, y_j)$ 正対称系の式を $n = 1, 3, 5 \dots \infty$ $S' = 1, 3, 5 \dots (2r'-1)$ に変更する。

$$(x_j, 0) - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (a_n P_a - \sum_i b_n P_i + \sum_i c_n M_{Qi}) - \sum_{S=1,3,5,\dots}^{2r'-1} \frac{S^2}{\lambda^2} \left\{ (\varphi'_{AS} + \lambda S'\pi \xi_j) \cosh \lambda S'\pi \xi_j \right.$$

$$+ (\varphi'_{CS} + \varphi'_{BS} \lambda S'\pi \xi_j) \sinh \lambda S'\pi \xi_j \left. \right\} A_S' + \sum_{S=2,4,\dots}^{2r} S^2 \lambda^2 (\varphi_{AS} + 2\varphi_{BS}) A_S \cos S\pi \xi_j$$

$$- \frac{2\lambda^4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} m (d m n P_a - \sum_i e_{mn} P_i + \sum_i f_{mn} M_{Li} + \sum_i g_{mn} M_{Qi}) \cos m\pi \xi_j = 0$$

2) 節点方程式

i) 正対称の場合

$$(x \text{ 方向}) \lambda \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} (a_m P_a - \sum_i b_m P_i + \sum_i c_m M_{Li}) \left\{ \sin m\pi \xi_i - \frac{m\pi}{2} (1 - \xi_i) \right\} \oplus \frac{2\lambda^3}{\pi} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2}$$

$$\times (d m n P_a - \sum_i e_{mn} P_i + \sum_i f_{mn} M_{Li} + \sum_i g_{mn} M_{Qi}) \sin m\pi \xi_i \cos n\pi \eta_i$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{s} \lambda \{ (g_{As} + \frac{s\pi}{\lambda} \eta_i) \cosh \frac{s\pi}{\lambda} \eta_i + (g_{Bs} + g_{Bs} \frac{s\pi}{\lambda} \eta_i) \sinh \frac{s\pi}{\lambda} \eta_i \} A_s \sin s\pi \xi_i \\
& - \sum_{s=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{s} \lambda \{ (g'_{As} + g'_{Bs} + \lambda s\pi \xi_i) \sinh \lambda s\pi \xi_i + (g'_{Cs} + 1 + g'_{Bs} \lambda s\pi \xi_i) \cosh \lambda s\pi \xi_i \} A'_s \\
& \times \cos s\pi \eta_i - \frac{D\pi^4}{8b^3} \times \frac{M\eta_i}{4K\eta_i} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\eta \text{ 方向}) \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{n} \lambda \{ a_n P_n - \sum_{m=2,4,6}^{\infty} b_m P_m + \sum_{m=2,4,6}^{\infty} c_m M_{0i} \} \{ \sin n\pi \eta_i - \frac{n\pi}{2} (1-2\eta_i) \} \\
& + \frac{2\lambda^4}{\pi} \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \{ d_{mn} P_n \sum_{m=2,4,6}^{\infty} e_{mn} P_m + \sum_{m=2,4,6}^{\infty} f_{mn} M_{0i} + \sum_{m=2,4,6}^{\infty} g_{mn} M_{0i} \} \cos m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_i \\
& + \sum_{s=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{s} \lambda \{ (g'_{As} + \lambda s\pi \xi_i) \cosh \lambda s\pi \xi_i + (g'_{Cs} + g'_{Bs} \lambda s\pi \xi_i) \sinh \lambda s\pi \xi_i \} A'_s \sin s\pi \eta_i \\
& - \sum_{s=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{s} \lambda \{ (g_{As} + g_{Bs} + \frac{s\pi}{\lambda} \eta_i) \sinh \frac{s\pi}{\lambda} \eta_i + (g_{Cs} + 1 + g_{Bs} \frac{s\pi}{\lambda} \eta_i) \cosh \frac{s\pi}{\lambda} \eta_i \} A_s \cos s\pi \xi_i \\
& - \frac{D\pi^4}{8b^3} \times \frac{M\eta_i}{4K\eta_i} = 0 \quad K\eta_i, K\gamma_i = \text{柱剛度 } \frac{E_i I_{\eta_i}}{h_i}, \frac{E_i I_{\gamma_i}}{h_i}
\end{aligned}$$

ii) x 方向正対称 y 方向逆対称の場合

(x 方向) 正対称系の式より $\times$ 関数を除去し, $S' = 1, 3, 5 \dots (2f-1)$ に変更する。

(y 方向) 柱に部材回転 R_i が生じ層方程式が累加されるが逆対称条件より $R_i = -\frac{\pi}{2} \theta \eta_i$ と
なり層方程式は消去され y 方向節点方程式は正対称系の式の末項 $\frac{D\pi^4}{8b^3} \times \frac{M\eta_i}{4K\eta_i}$ を $\frac{D\pi^4}{8b^3} \times \frac{M\eta_i}{K\eta_i}$ に変更
し, さらに $n = 1, 3, 5 \dots \infty$, $S' = 1, 3, 5 \dots (2f-1)$ に変更した形になる。(本例では柱下端固定)

3) 支承条件式

i) 正対称の場合

W_0 及び柱頭反力 P_i は各柱頭上のにわみ $W(x_i, y_i) = 0$ 及び構造全体の $\sum V = 0$ より求められる。

ii) x 方向正対称 y 方向逆対称の場合

柱頭反力 P_i は各柱頭上のにわみ $W(x_i, y_i) = 0$ より求められる。

以上 1), 2), 3) の各解式を連立させて正対称及び x 方向正対称 y 方向逆対称の解を求める。

④計算例: 前述の解式の妥当性を検討するため 各解式を組み合わせる例題として全周辺完全自由の正方形床板が 4 本の柱と剛結した構造の正対称並びに一方向非対称の曲げについて計算した結果を示す。柱配置並びに

寸法は図-2 に示す通りであり

荷重としては正対称の場合、全面等分布荷重 非対称の場合は

半載等分布荷重を採り、解析上 (正対称)

床板各辺 10 等分点を境界選点と

して選んだ。次頁の図-3, 図

-4 にこれら各 Case のにわみ等

高線図 および図-5, 6, 7

に同じくモーメント分布図を (非対称)

示した。

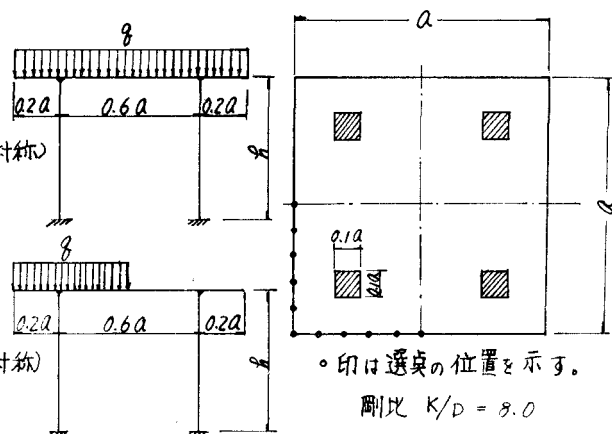
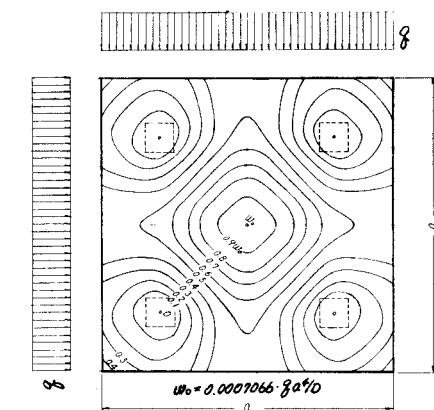


図-2

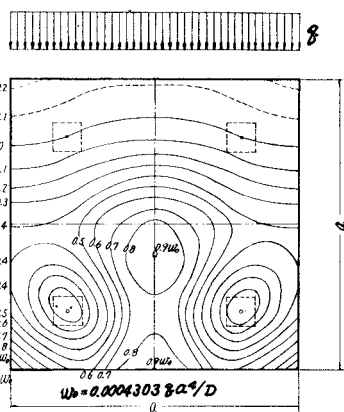


正対称
(対称)

(図-3)

非対称
(対称)

(図-4)



正対称モーメント図

非対称モーメント図 (My)

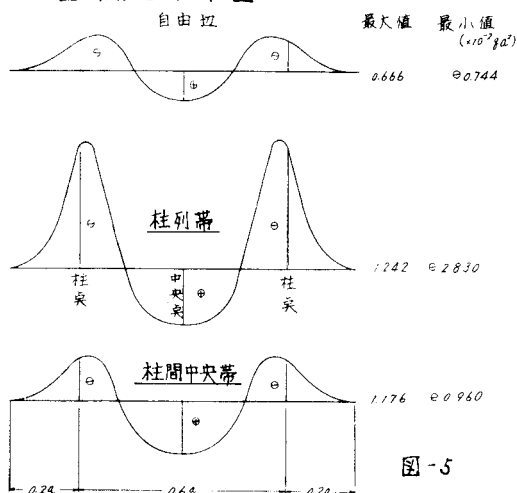


図-5

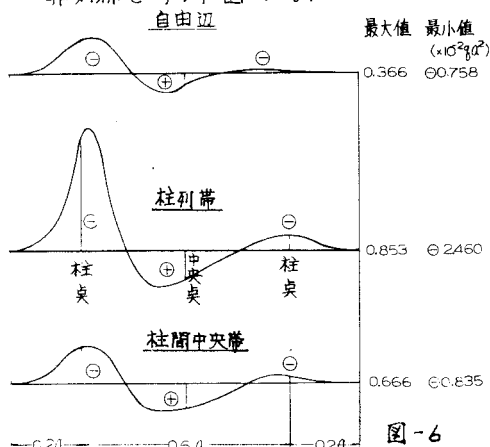


図-6

非対称モーメント図 (Mx) (荷重載荷部)

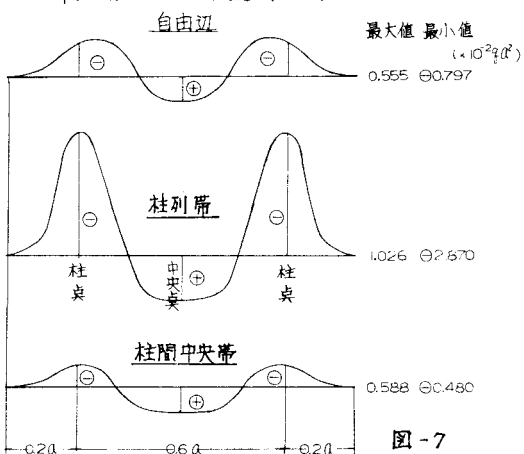


図-7

V) 結論: 本例で示した解析結果においても、自由辺、柱列帯、柱間帯各部のモーメントの差は著しく、この構造が立体的解析により始めて評価出来ることを示している。本例のような荷重の場合では、柱列帯のモーメントは柱間帯の1/2の床板を有効巾にしたラーメン解と比較すると柱頭モーメントで5~10%、空間モーメントで20%程度の減りがみられているが載頭台面積を増大させればさらに減りしより、また本例に示した方法を拡張して設計上必要とばあその他のCaseについて

も評価を与えることが出来る。またこの様な解析値を根拠に模型の精度を確認し、すでに開発した平板モーメント影響面のAutomatic Recorder²⁾を用い多数の設計DataをModel Analysisにより得たいと考えている。

2) H. Kamura, Automatic Recording Equipments for the Model Analysis of the Influence Surface of Plate (1963)