# I －51　点支承をもつ矩形板の変形法公式


九州大学工学部　正　員　山崎　徳也

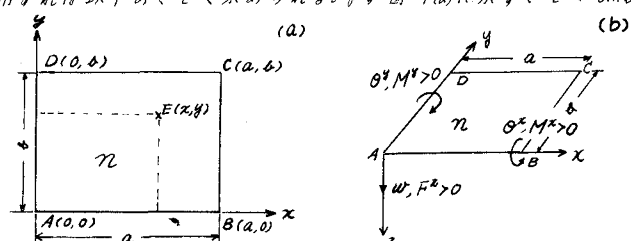
〃　　〃　　〃　太田　俊昭

〃　大学院　学生員○馬場先勝弘


1. 緒言　平板解法の主たるものとしては、階差法、Grid Frame Work Method,[1] Finite Element Method および フーリェ級数による解法などがあるが、著者らはこのうち Finite Element Method を用いて板とはりとで構成される構造物の解析を試みた。すなわち、本論文は周辺の境界条件が任意で弾性点支承をもつ矩形板の変形法公式を Finite Element Method によって求め、既往の直線材たわみ角式と併用することによってかかる構造物の応力解析を一般化することを可能ならしめたものである。

2. 矩形板の Stiffness Matrix　Finite Element Method は対象とする板を微小矩形板(あるいは微小三角形板)に分割し、各微小矩形板がこれらの4つの頂点(いわゆる Node)においてのみ力学的釣合条件と変形の連続条件とを満足して相互に結合されていると見做す解析法であるゆえ、これを変形法で解くには、同微小板に対する応力と変形の関係を規定する Stiffness Matrix が当然必要となる。

Stiffness Matrix は仮想仕事の原理を適用すれば以下のごとく求められる。まず図-1(a)に示すごとく $a\times b$ の微小矩形板 $n$ の任意点 $E(x,y)$ におけるたわみ $w$ を次のごとく仮定する。



図－1

$$w=\alpha_1+\alpha_2\bar{x}+\alpha_3\bar{y}+\alpha_4\bar{x}^2+\alpha_5\bar{x}\bar{y}+\alpha_6\bar{y}^2+\alpha_7\bar{x}^3+\alpha_8\bar{x}^2\bar{y}+\alpha_9\bar{x}\bar{y}^2+\alpha_{10}\bar{y}^3+\alpha_{11}\bar{x}^3\bar{y}+\alpha_{12}\bar{x}\bar{y}^3 \quad \cdots\cdots(1)$$

ただし　$\bar{x}=x/a$,　$\bar{y}=y/a$ 。

式(1)を行列表示すれば次式をうる。

$$w=[1\ \ \bar{x}\ \ \bar{y}\ \ \bar{x}^2\ \ \bar{x}\bar{y}\ \ \bar{y}^2\ \ \bar{x}^3\ \ \bar{x}^2\bar{y}\ \ \bar{x}\bar{y}^2\ \ \bar{y}^3\ \ \bar{x}^3\bar{y}\ \ \bar{x}\bar{y}^3][\alpha] \quad \cdots\cdots(2)$$

ただし、$[\alpha]$ は未知定数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_{12}$ を要素とする12行1列の列行列である。

いま微小矩形板 $n$ の各 Node における変形成分(Nodal Deformation) $U$、すなわち $z$ 軸方向のたわみ $w$、および $x, y$ 軸回りの回転角 $\theta^x,\theta^y$ を $U=[w\ \ a\theta^x\ \ b\theta^y]^T$ で、一般力(Nodal Force) $F$、すなわち $z$ 軸方向の力 $F^z$ および $x, y$ 軸回りのモーメント $M^x, M^y$ を $F=[F^z\ \ M^x/a\ \ M^y/b]^T$ で表わすものとする。(図-1(b)参照)　さてこの微小矩形板 $n$ の各 Node A, B, C, D の Nodal Deformation および Nodal Force をそれぞれ一括して $U^n$ および $F^n$ で式(3)および式(4)のごとく一般表示する。

$$U^n=[U_A\ \ U_B\ \ U_C\ \ U_D]^T \quad \text{ゆえに式(2)を代入して} \quad U^n=[C][\alpha] \quad \cdots\cdots(3)$$

$$F^n=[F_A\ \ F_B\ \ F_C\ \ F_D]^T \quad \cdots\cdots(4)$$

ただし式(3)の $[C]$ は Node A, B, C, D の $x, y$ 座標値に関する12行12列の係数行列であり、また行列の肩字 $T$ は転置行列を表わす。ここで、この板の Stiffness Matrix を $[K]$ で表わせば、作用荷重がないときの $F^n$ が次式で与えられる。

$$F^n=[K]U^n \quad \text{あるいは} \quad U^n=[K]^{-1}F^n \quad \cdots\cdots(5)$$

また内力モーメントすなわち $x, y$ 軸に関する単位長さ当りの曲げモーメント $M_x, M_y$ および捩りモーメント $M_{xy}$ を一括して $M=[M_x\ \ M_y\ \ M_{xy}]^T$ で表わす。ここで板を等方性と仮定し、板の曲げ剛性およびポアソン比

をそれぞれ$D_0$, $\nu$とすれば、$\mathcal{M}$は一般にたわみ$w$で次のごとく定義される。

$$\mathcal{M}=\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} D_0 & \nu D_0 & 0 \\ \nu D_0 & D_0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)D_0/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\partial^2 w/\partial x^2 \\ -\partial^2 w/\partial y^2 \\ 2\partial^2 w/\partial x\partial y \end{Bmatrix}=[D]\mathbf{X} \qquad \cdots\cdots (6)$$

ただし、

$$[D]=\begin{bmatrix} D_0 & \nu D_0 & 0 \\ \nu D_0 & D_0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)D_0/2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}=\begin{Bmatrix} -\partial^2 w/\partial x^2 \\ -\partial^2 w/\partial y^2 \\ 2\partial^2 w/\partial x\partial y \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots (7)$$

式(7)の曲率$\mathbf{X}$と$\mathbf{U}^n$の関係式は式(2),式(7)より$\mathbf{X}=[B][\alpha]/a^2$と表わされるゆえ,式(3)の関係を用いて$[\alpha]$を消去すれば結局$\mathbf{X}$が次のごとく求められる。 $\mathbf{X}=[B][C]^{-1}\mathbf{U}^n/a^2$

上式に式(5)を代入すれば、 $\mathbf{X}=[B][C]^{-1}[K]^{-1}\mathbf{F}^n/a^2$ $\cdots\cdots$(8)

ここに$[B]$は位置の変数$x, y$に関する3行12列の行列である。

次にVirtual Nodal Force $\delta\mathbf{F}^n$による補正エネルギー$\overline{W}_I$は内力モーメントおよび曲率の増分をそれぞれ$\delta\mathcal{M}, \delta\mathbf{X}$とすれば、 $\overline{W}_I=\iint\delta\mathcal{M}^T\mathbf{X}\,dxdy$ この式に式(6)を代入して

$$\overline{W}_I=\iint([D]\delta\mathbf{X})^T\mathbf{X}\,dxdy=\frac{1}{a^2}\iint\delta\mathbf{X}^T[D]^T[B][C]^{-1}\mathbf{U}^n\,dxdy \qquad \cdots\cdots (9)$$

式(8)より$\delta\mathbf{X}=[B][C]^{-1}[K]^{-1}\delta\mathbf{F}^n/a^2$がえられるゆえ、Virtual Nodal Force $\delta\mathbf{F}^n=I$ (Identity Matrix)とすれば結局$\delta\mathbf{X}^T$として$\delta\mathbf{X}^T=([K]^{-1})^T([C]^{-1})^T[B]^T/a^2$をうる。ゆえに,この関係式を式(9)に代入すれば次式がえられる。

$$\overline{W}_I=\frac{1}{a^4}\iint([K]^{-1})^T([C]^{-1})^T[B]^T[D]^T[B][C]^{-1}\mathbf{U}^n\,dxdy=\frac{1}{a^2}([K]^{-1})^T([C]^{-1})^T\left\{\iint[B]^T[D]^T[B]\,d\bar{x}d\bar{y}\right\}[C]^{-1}\mathbf{U}^n \qquad \cdots\cdots (10)$$

一方, Virtual Nodal Force $\delta\mathbf{F}^n$のなす補正仕事$\overline{W}_E$は次のごとく示される。

$$\overline{W}_E=(\delta\mathbf{F}^n)^T\mathbf{U}^n=\mathbf{U}^n \qquad \cdots\cdots (11)$$

$\overline{W}_I=\overline{W}_E$であるゆえ,式(10)と式(11)の右辺を等置することによって所要の$[K]$が次のごとくえられる。

$$[K]=\frac{1}{a^2}([C]^{-1})^T\left\{\iint[B]^T[D][B]\,d\bar{x}d\bar{y}\right\}[C]^{-1} \qquad \cdots\cdots (12)$$

上式は当然Zienkiewicz[2)]らが求めた$[K]$に合致するが,将来の展開を考慮して補正エネルギーより誘導したものである。ここで例としてポアソン比$\nu$が0.3で$a=b$の等方性正方形板に対するStiffness Matrixを式(12)より算定すれば次のごとくえられる。

$$[K]=\frac{D_0}{a^2}\begin{bmatrix}
10.56 & -2.44 & 2.44 & -4.56 & -0.56 & 2.14 & -1.44 & -0.86 & 0.86 & -4.56 & -2.14 & 0.56 \\
-2.44 & 1.52 & -0.30 & -0.56 & 0.48 & 0 & 0.86 & 0.38 & 0 & 2.14 & 0.62 & 0 \\
2.44 & -0.30 & 1.52 & -2.14 & 0 & 0.62 & -0.86 & 0 & 0.38 & 0.56 & 0 & 0.48 \\
-4.56 & -0.56 & -2.14 & 10.56 & -2.44 & -2.44 & -4.56 & -2.14 & -0.56 & -1.44 & -0.86 & -0.86 \\
-0.56 & 0.48 & 0 & -2.44 & 1.52 & 0.30 & 2.14 & 0.62 & 0 & 0.86 & 0.38 & 0 \\
2.14 & 0 & 0.62 & -2.44 & 0.30 & 1.52 & -0.56 & 0 & 0.48 & 0.86 & 0 & 0.38 \\
-1.44 & 0.86 & -0.86 & -4.56 & 2.14 & -0.56 & 10.56 & 2.44 & -2.44 & -4.56 & 0.56 & -2.14 \\
-0.86 & 0.38 & 0 & -2.14 & 0.62 & 0 & 2.44 & 1.52 & -0.30 & 0.56 & 0.48 & 0 \\
0.86 & 0 & 0.38 & -0.56 & 0 & 0.48 & -2.44 & -0.30 & 1.52 & 2.14 & 0 & 0.62 \\
-4.56 & 2.14 & 0.56 & -1.44 & 0.86 & 0.86 & -4.56 & 0.56 & 2.14 & 10.56 & 2.44 & 2.44 \\
-2.14 & 0.62 & 0 & -0.86 & 0.38 & 0 & 0.56 & 0.48 & 0 & 2.44 & 1.52 & 0.30 \\
0.56 & 0 & 0.48 & -0.86 & 0 & 0.38 & -2.14 & 0 & 0.62 & 2.44 & 0.30 & 1.52
\end{bmatrix}$$

さて解法の便宜上〔K〕を3行3列の小行列 $K_{ij}$ $(i,j=A,B,C,D)$ で次のごとく表わす。

$$[K]=\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} & K_{AC} & K_{AD} \\ K_{BA} & K_{BB} & K_{BC} & K_{BD} \\ K_{CA} & K_{CB} & K_{CC} & K_{CD} \\ K_{DA} & K_{DB} & K_{DC} & K_{DD} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

よって、Nodal Force $F^n$ は式(4),式(13)および式(5)の第1式より次のごとく一般表示される。

$$F^n=\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ F_D \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} & K_{AC} & K_{AD} \\ K_{BA} & K_{BB} & K_{BC} & K_{BD} \\ K_{CA} & K_{CB} & K_{CC} & K_{CD} \\ K_{DA} & K_{DB} & K_{DC} & K_{DD} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{U}_A \\ \bar{U}_B \\ \bar{U}_C \\ \bar{U}_D \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

## 3. 変形法公式の誘導

さきに著者らが報告した方法[1]を準用して弾性点支承をもつ矩形板の変形法公式を求めれば以下のごとくである。まず板を図-2に示すごとく $(p-1)\times(q-1)$ 個の微小正方形板に分割する。いま $(i)$ 列 $(j)$ 行にある微小板 $(i,j)$ の左下の Node $N(i,j)$ に外力モーメントおよび力などの一般力 $\mathbf{F}_{ij}$ が作用するとき、Node $N$ における一般力の釣合式は次のごとくえられる(図-2参照)。

$$a_0(F^i_j)_A+b_0(F^{i-1}_j)_B+c_0(F^{i-1}_{j-1})_C+d_0(F^i_{j-1})_D-\mathbf{F}_{ij}=0 \quad \cdots (15)$$

ただし、$i=1,2,\cdots,p,\quad j=1,2,\cdots,q$。

いま、Node $N(i,j)$ の Nodal Deformation を $\bar{U}^i_j$ で一般表示し、かかる変換を式(14)に施したうえで式(15)に代入して整理すれば、結局次式をうる。

$$[(S)^{i-1}_{j-1}\cdots\cdots(S)^{i+1}_{j+1}][\bar{U}^{i-1}_{j-1}\cdots\cdots\bar{U}^{i+1}_{j+1}]^T-\mathbf{F}_{ij}=0 \quad \cdots (16)$$

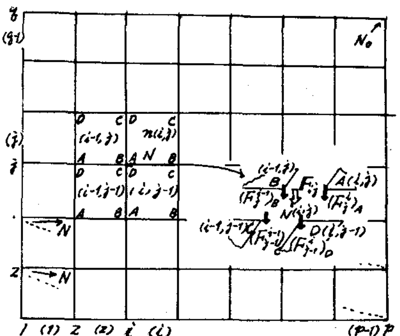


図-2

ここに、$(S)^{i-1}_{j-1},\cdots(S)^{i+1}_{j+1}$ は次の内容となる。

$$\left.\begin{aligned}
&(S)^{i-1}_{j-1}=c_0K_{CA}+T_{UL}K_{BD}, \quad (S)^{i}_{j-1}=c_0K_{CB}+d_0K_{DA}+T_{UL}K_{BC}+T_{UR}K_{AD}+T_{LB}K_{CB},\\
&(S)^{i+1}_{j-1}=d_0K_{DB}+T_{UL}K_{AC}+T_{LB}K_{CA}+T_{UL}\times T_{LU}K_{BD}, \quad (S)^{i-1}_{j}=b_0K_{BA}+c_0K_{CD}+T_{UL}K_{BA},\\
&(S)^{i}_{j}=a_0K_{AA}+b_0K_{BB}+c_0K_{CC}+d_0K_{DD}+T_{UR}K_{AA}+T_{UL}K_{BB}+T_{LB}K_{CC}+T_{LU}K_{BB}-T_{LU}\times T_{UR}K_{BB},\\
&(S)^{i+1}_{j}=d_0K_{DC}+a_0K_{AB}+T_{UR}K_{AB}+T_{LU}K_{BA}+T_{LB}K_{CD}, \quad (S)^{i-1}_{j+1}=b_0K_{BD},\\
&(S)^{i}_{j+1}=a_0K_{AD}+b_0K_{BC}+T_{LU}K_{BC}, \quad (S)^{i+1}_{j+1}=a_0K_{AC}+T_{LU}K_{BD},
\end{aligned}\right\} \cdots (17)$$

ただし、式(17)における係数 $a_0, b_0, c_0, d_0, T_{UL}, T_{UR}, T_{LB}$ および $T_{LU}$ は板の周辺の境界条件によって定まる常数[1]である。

次に各 Nodal Deformation $\bar{U}^i_j$ に関する添字 $(i,j)$ を更めて通し番号 $N=3\{(j-1)p+i-1\}+1$ (図-2参照)で示すことにすれば式(16)より容易に所要の連立方程式の係数行列に関する要素 $(S)$ の行列番号が定まり、したがって係数行列が確定される。すなわち、

$$[S]\begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N_0} \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{N_0} \end{Bmatrix}=0 \qquad \therefore \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N_0} \end{Bmatrix}=[\bar{S}]\begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{N_0} \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (18)$$

ただし、$[\bar{S}]=[S]^{-1}$ である。以上より式(17)を基盤とするプログラムに板周辺の境界条件 $(a_0, b_0, \cdots T_{LU}$ など$)$ に関するプログラムを組合せることによって、節点方程式に関する係数行列$[S]$を自動的に作製するプログラミングが可能となり、したがって式(18)の逆行列$[\bar{S}]$も容易に算定できる。所要のたわみ角式はこの逆行列$[\bar{S}]$を用いて以下のごとく簡単に求めうる。いま例として、図-3に示すごとき2点 $Q, R$ で弾性支持された周辺任意境界条件の矩形板の変形法公式を求めれば、次のごとくである。

$Q, R$点の Nodal Deformation の通し番号をそれぞれ $Q, R$ とすれば、式(18)より次式をうる。

$$\begin{Bmatrix} U_Q \\ U_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{QQ} & \bar{S}_{QR} \\ \bar{S}_{RQ} & \bar{S}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_Q \\ \bar{F}_R \end{Bmatrix} + \sum_{N=1}^{N_0} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{QN} \\ \bar{S}_{RN} \end{Bmatrix} [F_N] \quad \cdots\cdots (19)$$

ただし、$F_N = \bar{F}_N - \mathring{F}_N$

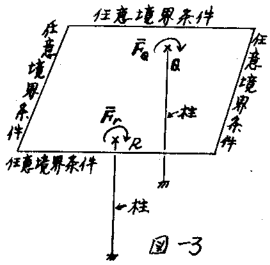


図-3

よって所要の変形法公式が次式で求められる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_Q \\ \bar{F}_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{QQ} & \bar{S}_{QR} \\ \bar{S}_{RQ} & \bar{S}_{RR} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U_Q \\ U_R \end{Bmatrix} - \sum_{N=1}^{N_0} \begin{bmatrix} \bar{S}_{QQ} & \bar{S}_{QR} \\ \bar{S}_{RQ} & \bar{S}_{RR} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{QN} \\ \bar{S}_{RN} \end{Bmatrix} [F_N] \quad \cdots\cdots (20)$$

ただし、$\bar{F}_Q, \bar{F}_R$は Node $Q, R$ に働く不静定力で、$\bar{F}_N$は Node $N$に直接作用する一般外力であり、$\mathring{F}_N$ は Node $N$に接する各微小矩形板に働く荷重を各々 Nodal Force に換算した値の総和を意味する。

4．計算例　3辺固定1辺自由の2つの正方形板がそれぞれ自由辺の中央点 $A, B$において1つの柱 $ABC$ で結合された図-4のごとき板－はり複合構造を考え、鉛直集中荷重 $P$ が上板の中央点 $G$ に作用するときの解析を以下に行なう。板の変形法公式($p=q=5$)は式(20)よりそれぞれ次式で与えられる。

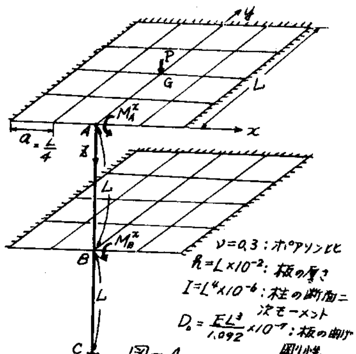


図-4

$$\left.\begin{aligned} F_A^z &= D_0/a^2(3.822\,w_A - 1.489\,a\theta_A^x) - 0.187P \\ M_A^x/a &= D_0/a^2(-1.489\,w_A + 1.827\,a\theta_A^x) + 0.115P \\ F_B^z &= D_0/a^2(3.822\,w_B - 1.489\,a\theta_B^x) \\ M_B^x/a &= D_0/a^2(-1.489\,w_B + 1.827\,a\theta_B^x) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (21)$$

ただし、本例では $w_A = w_B = 0$ である。さて節点 $A$ および $B$ で $x$ 軸に関するモーメントの釣合式をたて、柱に関しては周知の直線材たわみ角式を、板に対しては式(21)を用いて解けば、$a\theta_A^x = -3.725\times10^3 P/EL$，$a\theta_B^x = 0.894\times10^3 P/EL$ が、したがって式(21)より $F_A^z = -0.179P$，$M_A^x/a = 0.105P$，$F_B^z = -0.002P$，$M_B^x/a = 0.002P$ がそれぞれ算出される。これらを式(18)に代入すれば板の各点の変形成分が定まり、結果のみ示せば、図-5のごとくえられる。

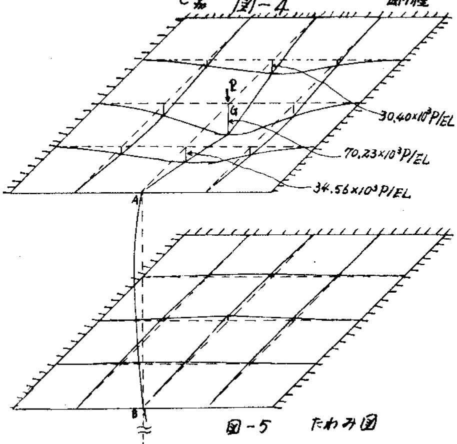


図-5　たわみ図

5．結語　本論文は弾性点支承をもつ矩形板の変形法公式を自動的に作製しうるプログラムを考案し、板とはりとで構成される構造物の解法を変形法に基づいて一般的に論じたものである。本法の特色を要約すれば、第1に上記プログラムが任意の周辺境界条件に対して適用可能であること。第2に分割数 $p, q$ が任意である故、必要に応じて精度を高めうること、さらに第3として弾性点支承の位置とその数を任意に選びうるなどの一般性が利点として挙げられる。なお本論文では面外変形に関してのみ取り扱ったが、面内変形についても同様の解析手法が可能であり、これについては後日発表の予定である。


(参考文献) (1) 山崎, 太田, 馬場先：矩形板の変形公式，昭和41年度土木学会西部支部研究発表会論文集，昭和42年1月

(2) O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung : The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs, Proc. of the I.C.E., Vol. 28, August 1964