

九州大学 工学部 正 員 山崎徳也

福岡建設コンサルタント " 篠藤 実

九州大学 工学部 " 〇太田俊昭

1. 諸言 材軸方向に塑性領域をもち両材端の支持条件が任意の直線部材のたわみ曲線の算定は、仮想仕事の原理に¹⁾とて著者が導いた弾塑性補正エネルギーの実用式を用いることによって容易に求めることができる。そこで両材端に反力ならびに不静定モーメントと中間荷重（旋りモーメントはたわみ曲線には影響ない）を受ける直線部材の弾性および弾塑性時にあけるたわみ曲線の一般式を導き、各種係数をあらかじめ算出のうえ数表化しておけば、これを直線部材で構成される平面および立休ラーメンに応用することによって、かかる構造物が弾性および弾塑性時に如何なる変形状態を示すか、また如何なる変形過程を経て崩壊に達するかをつぶさに観察することが可能となる。以下にその骨子を概説する。

2. 両端に塑性領域を有する直線部材のたわみ曲線

図-1のごとく、両材端A, Bより、それぞれAC, BDの範囲に塑性領域をもつ等断面直線部材ABを考え、両材端A, Bにそれぞれ不静定モーメント M_{AB} , M_{BA} および反力 R_A , R_B が働くとき部材ABに与えられる補正エネルギー U を算定すれば、文献(1)より

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx + K_1 \int_0^{al} \frac{(M - M_{yA})^2}{2EI} dx + K_1 \int_{bl}^l \frac{(M - M_{yB})^2}{2EI} dx \quad \text{-----}(1)$$

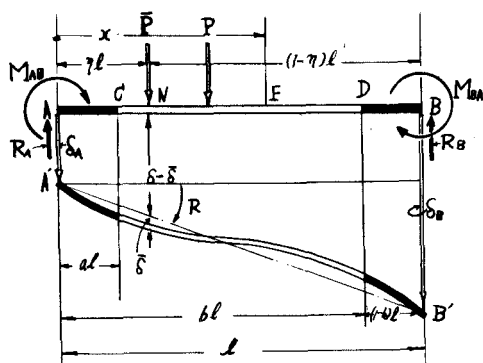


図-1

ここに M_{yA} , M_{yB} はそれぞれ、点C, Dの降伏曲げモーメント値を表わし、符号は作用モーメント²⁾のそれに合致するものとする。またEIは曲げ剛性で、 $K_1 = K'_1 - 1$ であり、 K'_1 はM-φ第1近似直線の弾塑性部の勾配を規定する定数で、詳しくは文献(2)を参照のこと。

さて部材上の定負Nのたわみは図-1に示すごとく同負Nに仮想荷重 $\bar{P}$ を加えることによって以下のごとく算定される。すなわち、部材の任意点Eに働くモーメントは一般に次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A \sim N \text{ 区画;} & \quad M = R_A x + M_{AB} + M_0 + (1-\eta)x\bar{P} \\ N \sim B \text{ 区画;} & \quad M = R_A x + M_{AB} + M_0 + \eta(l-x)\bar{P} \end{aligned} \right\} \text{-----}(2)$$

ただし $R_A = -(M_{AB} + M_{BA})/l$, M_0 : 中間荷重による任意点Eのモーメント。

よって式(1)に式(2)を代入のうえ変分原理¹⁾を適用すれば、定負Nのたわみ $\bar{\delta}$ は次のごとく求められる。

$$\begin{aligned} (i) \text{ 領域-I (A} \sim \text{C)}; & \quad \bar{\delta}_1 = \frac{\partial U}{\partial \bar{P}} \bigg|_{\bar{P}=0} = \int_0^{al} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{P}} dx + K_1 \int_0^{al} \frac{(M - M_{yA})}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{P}} dx \\ & + K_1 \int_{bl}^l \frac{(M - M_{yB})}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{P}} dx = \int_0^{al} \frac{M}{EI} (1-\eta)x dx + \int_{bl}^l \frac{M}{EI} \eta(l-x) dx + \end{aligned}$$

$$K_I \left\{ \int_0^{\eta \ell} \frac{(M - M_{yA})}{EI} (1 - \eta) \chi d\chi + \int_{\eta \ell}^{\alpha \ell} \frac{(M - M_{yA})}{EI} \eta (\ell - \chi) d\chi + \int_{b\ell}^{\ell} \frac{(M - M_{yB})}{EI} \eta (\ell - \chi) d\chi \right\}$$

上式を χ について積分し、結果を整理すれば次式をうる。

$$\bar{\delta}_I = (\delta_{aI} \cdot M_{AB} + \delta_{bI} \cdot M_{BA} + \delta_{cI} \cdot M_{yA} + \delta_{dI} \cdot M_{yB} + \delta_{oI}) \times \ell^2 / EI \quad \text{----- (3)}$$

(ii) 領域 - II ($C \sim D$) :

$$\bar{\delta}_{II} = \int_0^{\eta \ell} \frac{M}{EI} (1 - \eta) \chi d\chi + \int_{\eta \ell}^{\ell} \frac{M}{EI} (\ell - \chi) \eta d\chi + K_I \left\{ \int_0^{\alpha \ell} \frac{(M - M_{yA})}{EI} (1 - \eta) \chi d\chi + \int_{b\ell}^{\ell} \frac{(M - M_{yB})}{EI} \eta (\ell - \chi) d\chi \right\}$$

$$\text{よって } \bar{\delta}_{II} = (\delta_{aII} \cdot M_{AB} + \delta_{bII} \cdot M_{BA} + \delta_{cII} \cdot M_{yA} + \delta_{dII} \cdot M_{yB} + \delta_{oII}) \times \ell^2 / EI \quad \text{----- (4)}$$

(iii) 領域 - III ($D \sim B$) :

$$\bar{\delta}_{III} = \int_0^{\eta \ell} \frac{M}{EI} (1 - \eta) \chi d\chi + \int_{\eta \ell}^{\ell} \frac{M}{EI} (\ell - \chi) \eta d\chi + K_I \left\{ \int_0^{\alpha \ell} \frac{(M - M_{yA})}{EI} (1 - \eta) \chi d\chi + \int_{b\ell}^{\eta \ell} \frac{(M - M_{yB})}{EI} (1 - \eta) \chi d\chi + \int_{\eta \ell}^{b\ell} \frac{(M - M_{yB})}{EI} \eta (\ell - \chi) d\chi \right\}$$

$$\text{よって } \bar{\delta}_{III} = (\delta_{aIII} \cdot M_{AB} + \delta_{bIII} \cdot M_{BA} + \delta_{cIII} \cdot M_{yA} + \delta_{dIII} \cdot M_{yB} + \delta_{oIII}) \times \ell^2 / EI \quad \text{----- (5)}$$

以上より領域 - i ($i = I, II, III$) における所要のたわみ曲線 δ_i の算定式が、両枝端の変位 δ_A, δ_B の影響を加味して結局次式で与えられる。

$$\delta_i = \bar{\delta}_i + (1 - \eta) \delta_A + \eta \delta_B \quad \text{----- (6)}$$

ここに $\delta_{aI}, \delta_{bI}, \dots, \delta_{dIII}$ の式内容は、それを表-1に示すごとくで、部材の10等分点に対する諸値を a, b を変数として数表化して実用に供しうることとしたが、紙面の都合上表-1にその1例を示すに止めた。また $\delta_{oI}, \delta_{oII}, \dots$ は中間荷重によるたわみ影響量であり、次の式(7)の内容となる。

表-1

i	I	II	III
δ_{aI}	$K_I' \{ \eta f_1(a) - g_1(\eta) \} + \eta \{ f_1(b) - f_1(a) \} + K_I' \eta \{ f_1(1) - f_1(b) \}$	$K_I' \{ \eta f_1(a) - g_1(a) \} + \eta \{ f_1(b) - f_1(a) \} - g_1(\eta) + g_1(a) + K_I' \eta \{ f_1(1) - f_1(b) \}$	$K_I' \{ \eta f_1(a) - g_1(a) \} + \eta \{ f_1(b) - f_1(a) \} - g_1(b) + g_1(a) + K_I' [\eta \{ f_1(1) - f_1(b) \} - \{ g_1(\eta) - g_1(b) \}]$
δ_{bI}	$K_I' \{ \eta f_2(a) - g_2(\eta) \} + \eta \{ f_2(b) - f_2(a) \} + K_I' \eta \{ f_2(1) - f_2(b) \}$	$K_I' \{ \eta f_2(a) - g_2(a) \} + \eta \{ f_2(b) - f_2(a) \} - g_2(\eta) + g_2(a) + K_I' \eta \{ f_2(1) - f_2(b) \}$	$K_I' \{ \eta f_2(a) - g_2(a) \} + \eta \{ f_2(b) - f_2(a) \} - g_2(b) + g_2(a) + K_I' [\eta \{ f_2(1) - f_2(b) \} - \{ g_2(\eta) - g_2(b) \}]$
δ_{cI}	$(1 - K_I') \{ \eta f_3(a) - g_3(\eta) \}$	$(1 - K_I') \{ \eta f_3(a) - g_3(a) \}$	$(1 - K_I') \{ \eta f_3(a) - g_3(a) \}$
δ_{dI}	$(1 - K_I') \{ f_3(1) - f_3(b) \} \eta$	$(1 - K_I') \{ f_3(1) - f_3(b) \} \eta$	$(1 - K_I') [\eta \{ f_3(1) - f_3(b) \} - \{ g_3(\eta) - g_3(b) \}]$

ただし $f_1(x) = x - x^2 + x^3/3, f_2(x) = -x^2/2 + x^3/3, f_3(x) = x - x^2/2, g_1(x) = \eta x - (1/\eta)x^2 + x^3/2, g_2(x) = -\eta x^2/2 + x^3/3, g_3(x) = \eta x - x^2/2$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{OI} &= \int_0^{\eta} M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_{\eta}^1 M_0\eta(1-\xi)d\xi + K_1 \left\{ \int_0^{\eta} M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_{\eta}^a M_0\eta(1-\xi)d\xi + \int_b^1 M_0\eta(1-\xi)d\xi \right\} \\ \delta_{OII} &= \int_0^{\eta} M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_{\eta}^1 M_0\eta(1-\xi)d\xi + K_1 \left\{ \int_0^a M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_b^1 M_0\eta(1-\xi)d\xi \right\} \\ \delta_{OIII} &= \int_0^{\eta} M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_{\eta}^1 M_0\eta(1-\xi)d\xi + K_1 \left\{ \int_0^a M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_b^{\eta} M_0(1-\eta)\xi d\xi + \int_{\eta}^1 M_0\eta(1-\xi)d\xi \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (7)}$$

ただし $\xi = x/l$

なお上記の δ_{OI} , δ_{OII} , δ_{OIII} および荷重に関する δ_{OII} において $a = 0$, $b = 1$ とおけば, 直ちに式(6) ($i = II$) は弾性時における直線部材のたわみ曲線の算定式となる。

3. 中間に塑性領域を有する直線部材のたわみ曲線

図-2のごとくCDの範囲に塑性領域を有する直線部材ABを考え, 両材端A, Bに M_{AB} , M_{BA} および R_A , R_B が働くとき部材全体に与えられる補正エネルギー U を算定すれば, 同様に文献(1)より次式で与えられる。

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx + K_1 \int_{al}^{bl} \frac{(M - M_{yc})^2}{2EI} dx \quad \text{----- (8)}$$

2. の場合と同様に, 定常 N に仮想荷重 $\bar{P}$ を加え, 変分原理を適用して領域- i ($i = I, II, III$) のたわみ曲線 δ_i を求めて整理すれば, 結局次のごとく纏められる。

$$\delta_i = (\delta_{ai} \cdot M_{AB} + \delta_{bi} \cdot M_{BA} + \delta_{ci} \cdot M_{yc} + \delta_{oi}) \times l^2/EI + (1-\eta)\delta_A + \eta\delta_B \quad \text{--- (9)}$$

ここに δ_{ai} , δ_{bi} , δ_{ci} は表-2に示すごとくなり, また δ_{oi} は中間荷重によるたわみ影響量で, それぞれ次の式(10)の内容となる。

表-2

i	I	II	III
δ_{ai}	$\eta f_1(a) - g_1(\eta)$ + $K_1' \eta \{ f_1(b) - f_1(a) \}$ + $\eta \{ f_1(1) - f_1(b) \}$	$\eta f_1(a) - g_1(a)$ + $K_1' [\eta \{ f_1(b) - f_1(a) \}$ - $\{ g_1(\eta) - g_1(a) \}$ + $\eta \{ f_1(1) - f_1(b) \}$	$\eta f_1(a) - g_1(a) + K_1' [\eta \{ f_1(b)$ - $f_1(a) \} - \{ g_1(b) - g_1(a) \}]$ + $\eta \{ f_1(1) - f_1(b) \}$ - $g_1(\eta) + g_1(b)$
δ_{bi}	$\eta f_2(a) - g_2(\eta)$ + $K_1' \eta \{ f_2(b) - f_2(a) \}$ + $\eta \{ f_2(1) - f_2(b) \}$	$\eta f_2(a) - g_2(a)$ + $K_1' [\eta \{ f_2(b) - f_2(a) \}$ - $\{ g_2(\eta) - g_2(a) \}$ + $\eta \{ f_2(1) - f_2(b) \}$	$\eta f_2(a) - g_2(a) + K_1' [\eta \{ f_2(b)$ - $f_2(a) \} - \{ g_2(b) - g_2(a) \}]$ + $\eta \{ f_2(1) - f_2(b) \}$ - $g_2(\eta) + g_2(b)$
δ_{ci}	$(1-K_1') \{ f_3(b) - f_3(a) \} \eta$	$(1-K_1') [\eta \{ f_3(b) - f_3(a) \}$ - $g_3(\eta) + g_3(a)]$	$(1-K_1') [\eta \{ f_3(b) - f_3(a) \}$ - $g_3(b) + g_3(a)]$

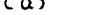
$$\left. \begin{aligned} \delta_{0I} &= \int_0^{\eta} M_0 (1-\eta) \xi d\xi + \int_{\eta}^1 M_0 \eta (1-\xi) d\xi + k_1 \int_a^b M_0 \eta (1-\xi) d\xi \\ \delta_{0II} &= \int_0^{\eta} M_0 (1-\eta) \xi d\xi + \int_{\eta}^1 M_0 \eta (1-\xi) d\xi + k_1 \left\{ \int_a^{\eta} M_0 (1-\eta) \xi d\xi + \int_{\eta}^b M_0 \eta (1-\xi) d\xi \right\} \\ \delta_{0III} &= \int_0^{\eta} M_0 (1-\eta) \xi d\xi + \int_{\eta}^1 M_0 \eta (1-\xi) d\xi + k_1 \int_a^b M_0 (1-\eta) \xi d\xi \end{aligned} \right\} \quad \dots (10)$$

「矩形断面をもつ直線部材の基本的変位 ($\alpha=0.2, b=0.8$)」表-3

η	δa_i	δb_i	δc_i	δd_i
0.1	0.0636	-0.0264	0.0130x-3	0.0020x-3
0.2	0.0912	-0.0488	0.0160 "	0.0040 "
0.3	0.0983	-0.0667	0.0140 "	0.0060 "
0.4	0.0984	-0.0816	0.0120 "	0.0080 "
0.5	0.0925	-0.0925	0.0100 "	0.0100 "
0.6	0.0816	-0.0984	0.0080 "	0.0120 "
0.7	0.0667	-0.0982	0.0060 "	0.0140 "
0.8	0.0488	-0.0912	0.0040 "	0.0160 "
0.9	0.0264	-0.0636	0.0020 "	0.0130 "

4. 計算例

図-3(a)および図-4(a)に示す矩形断面の両端固定ばりおよび格子桁（ただし部材Eの断面は、内径/外径=0.8の円管断面とする。）が、それぞれ漸増集中荷重Pを受けて崩壊に至るまでのたわみ曲線を算定し、結果の1部をそれぞれ図-3(b)および図-4(b)に図示した。（図中括弧内の数値はたわみ値を表す。）

(GJ/P)_{eq} = 5.0  (CQ)

5. 結び 本論文は直線部材で構成される平面および立体ラミネートの弾性および弾塑性時にあけるたわみ曲線を直接数値で決定しうる実用解法を提示したもので、本研究の結果、図-3(b)および図-4(b)に示すごとく塑性領域の発生に伴う曲げ剛性の減少と、塑性ヒンジ形成後のたわみ角の不連続現象などの、構造物が弾塑性時に示す変形特性の全貌が簡明に把握せられるようになった。

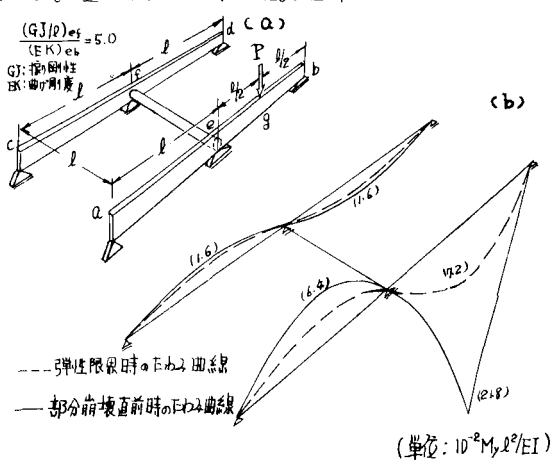
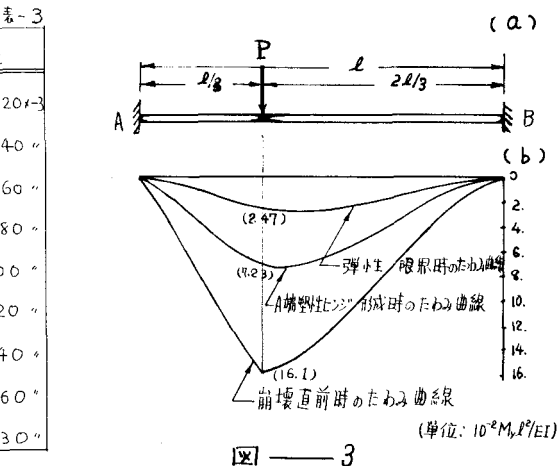


图 — 4

- (文 献) (1) T. Yamasaki and T. Ohta: *Simplified Elasto-Plastic Analysis of Structures by Complementary Energy Method*,
Proc. of the 14th Japan National Congress for Applied Mechanics 1964 December, 1965
(2) 山崎, 太田, 石川: 補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析, 土木学会論文集, 第134号, 昭和41年10月
(3) 山崎, 太田, 渡水: 純曲げおよび純捻りを受ける部材より構成される立体トラスの弾塑性解析, 九州工学学報, 第40巻, 第1号, 昭和42年3月