

九州大学 工学部 正員 山崎徳也

三菱重工業造船所 正員 北岡正幸

九州大学 大学院 学生員 後藤栄一

1. 緒言

本論文は Müller-Breslau の原理に基づき、マトリックス解析による任意形立体ラーメンの影響線解法を提示するもので、軸線が三次元的に変化する空間部材、例えば螺旋部材などをもつ骨組構造物の影響線が容易に求められ、かかる構造物の敷設設計に資せんとするものである。

2. 基本的変位の算定

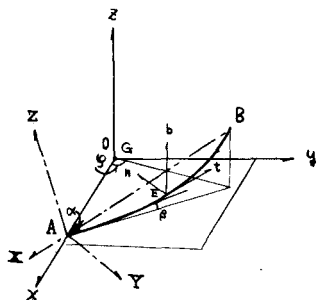


図-1

	e^x	e^y	e^z
e^x	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$
e^y	$\bar{m}_1$	$\bar{m}_2$	$\bar{m}_3$
e^z	$\bar{n}_1$	$\bar{n}_2$	$\bar{n}_3$

表-1

	e^t	e^n	e^b
e^x	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3
e^y	m_1	m_2	m_3
e^z	n_1	n_2	n_3

表-2

	e^t	e^n	e^b
e^x	ℓ'_1	ℓ'_2	ℓ'_3
e^y	m'_1	m'_2	m'_3
e^z	n'_1	n'_2	n'_3

表-3

空間部材 AB を規定する固定座標として、部材の特性に応じて適宜選んだ G 点を原点とする直交座標 (X, Y, Z) を導入し、別に両材端 A, B を結ぶ材端 A を原点とする直交座標 (x, y, z) を図-1 に示すごとく設置し、さらに部材の任意点の接線、法線および陪法線方向を三軸とする流動座標 (t, n, b) を採用すれば、これらの座標系の間には表-1、表-2 および表-3 に示すとき関係が成立する。ただし $\bar{e}_j, \bar{m}_j, \bar{n}_j$; ℓ_j, m_j, n_j ; ℓ'_j, m'_j, n'_j ($j=1, 2, 3$) はそれぞれ方向余弦を表わす。

いま X 軸方向の部材伸縮を $\Delta \ell$, Y および Z 軸廻りの部材回転角をそれぞれ R^Y および R^Z とし負軸方向右廻りを正とすれば次式をうる。

$$\Delta \ell = \Delta X_A - \Delta X_B, \quad R^Y = (\Delta Z_A - \Delta Z_B) / \ell, \quad R^Z = (-\Delta Y_A + \Delta Y_B) / \ell \quad (1)$$

ただし ℓ は部材 AB の弦長で、 $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ はそれぞれ X, Y および Z 軸方向の節点変位を表わす。

式(1)を表-1, 2, 3 を用いて変形すれば次式となる。

$$(\Delta \ell / \ell, R^Z, R^Y)^T = (L_0)(\bar{\Delta}^E) = (L_0)(D_0)(\bar{\Delta}^E) \quad (2)$$

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & -a_0 \end{bmatrix},$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} \ell'_{1A} & \ell'_{2A} & \ell'_{3A} & 0 & 0 & 0 \\ m'_{1A} & m'_{2A} & m'_{3A} & 0 & 0 & 0 \\ n'_{1A} & n'_{2A} & n'_{3A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell'_{1B} & \ell'_{2B} & \ell'_{3B} \\ 0 & 0 & 0 & m'_{1B} & m'_{2B} & m'_{3B} \\ 0 & 0 & 0 & n'_{1B} & n'_{2B} & n'_{3B} \end{bmatrix}$$

$$(\bar{\Delta}^E) = (\bar{\Delta}_A^E, \bar{\Delta}_B^E)^T = (\Delta X_A / \ell_0, \Delta Y_A / \ell_0, \Delta Z_A / \ell_0, \Delta X_B / \ell_0, \Delta Y_B / \ell_0, \Delta Z_B / \ell_0)^T$$

$$(\bar{\Delta}^E) = (\bar{\Delta}_A^E, \bar{\Delta}_B^E)^T = (\Delta t_A / \ell_0, \Delta n_A / \ell_0, \Delta b_A / \ell_0, \Delta t_B / \ell_0, \Delta n_B / \ell_0, \Delta b_B / \ell_0)^T$$

ただし $a_0 = \ell_0 / \ell$ で ℓ_0 は標準長を表わし、行列の肩字 T

は転置行列を示す。また $\Delta t, \Delta n, \Delta b$ はそれぞれ t, n および b 軸方向の節点変位である。

さて単位部材回転角 R , 単位部材伸縮 $\Delta \ell$ および単位接線角 π による部材 AB 上の定点 N の変位を

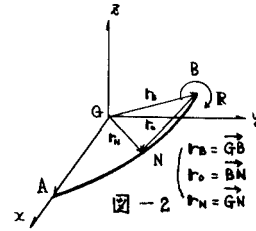
なわち基本的変位を求めればそれぞれ以下のごとくである。

(1) 単位部材回転角による基本的変位；

一般に材端Bの部材回転角ベクトルRによる部材上の定点Nの変位ベクトル Δ_N^R は次式で与えられる(図-2参照)

$$\Delta_N^R = R \times r_0 = R \times (r_N - r_B)$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & e^y & e^z \\ -R^x & -R^y & -R^z \\ r_{2N}-r_{2B}, r_{3N}-r_{3B}, r_{2N}-r_{3B} \end{vmatrix} = (V_r)(R^x, R^y, R^z)^T (e^e)$$



しかるに $\begin{pmatrix} R^x \\ R^y \\ R^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n}_1 & \bar{m}_1 \\ \bar{n}_2 & \bar{m}_2 \\ \bar{n}_3 & \bar{m}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^x \\ R^y \end{pmatrix}$ と表わされるゆえ、上式に代入すれば次式をうる。

$$\Delta_N^R = (U_r)(R^x, R^y)^T (e^e)$$

よって単位部材回転角 $(R^x, R^y)^T = (1, 1)^T$ による基本的変位ベクトルは次のごとくえられる。

$$\Delta_N^R = (U_r)(e^e) \quad (3)$$

$$\text{ここに } (e^e) = (e^x, e^y, e^z)^T, (U_r) = (V_r) \begin{pmatrix} \bar{n}_1 & \bar{m}_1 \\ \bar{n}_2 & \bar{m}_2 \\ \bar{n}_3 & \bar{m}_3 \end{pmatrix}, (V_r) = \begin{pmatrix} 0 & -(r_{2N}-r_{2B}), (r_{3N}-r_{3B}) \\ (r_{2N}-r_{2B}), 0 & -(r_{2N}-r_{3B}) \\ -(r_{3N}-r_{3B}), (r_{2N}-r_{3B}), 0 \end{pmatrix}$$

ただし e は単位ベクトルである。

(2) 単位部材伸縮による基本的変位；

図-3(a)に示すようにX軸方向に単位部材伸縮 $\Delta \ell = 1$ を与えたときの部材上の定点Nの基本的変位ベクトルを Δ_N^{ℓ} とすれば、仮想仕事の原理より定点Nに単位集中荷重Pが与えられたときの材端AのX軸方向の反力 F_A^x との間に次式が成立する。

$$(P^x e^x) \cdot (\Delta_N^{\ell} e^x) = F_A^x \cdot p_{x=1} \times \Delta \ell$$

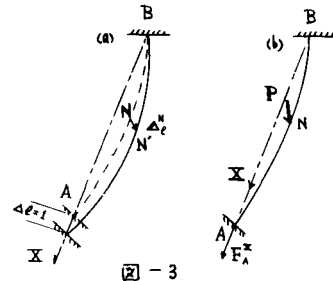
$$(P^y e^y) \cdot (\Delta_N^{\ell} e^y) = F_A^x \cdot p_{y=1} \times \Delta \ell$$

$$(P^z e^z) \cdot (\Delta_N^{\ell} e^z) = F_A^x \cdot p_{z=1} \times \Delta \ell$$

上式に $\Delta \ell = 1$, $P^x = P^y = P^z = 1$ を代入のうえ整理すれば結局 Δ_N^{ℓ} として次の値となる。

$$\Delta_N^{\ell} = (U_{\ell})(e^e) \quad (4)$$

$$\text{ここに } (U_{\ell}) = \begin{pmatrix} F_A^x \cdot p_{x=1} \\ F_A^x \cdot p_{y=1} \\ F_A^x \cdot p_{z=1} \end{pmatrix}, F_A^x = \begin{pmatrix} \ell'_1 & \ell'_2 & \ell'_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \\ n'_1 & n'_2 & n'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{AB}^x \\ P_{AB}^y \\ P_{AB}^z \end{pmatrix}, \text{ただし } P_{AB}^i (i=x, y, z) \text{ は定点Nに働く単位集中荷重による材端Aの} i \text{ 軸方向の固定端反力(詳しくは文献(1)を参照のこと。)}$$



(3) 単位接線角による基本的変位；

一般に接線角では回転角 θ および部材回転角Rによって次式で表わされる。

$$\begin{pmatrix} \Delta_A^x \\ \Delta_A^y \\ \Delta_A^z \\ \Delta_B^x \\ \Delta_B^y \\ \Delta_B^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_A^x \\ \theta_A^y \\ \theta_A^z \\ \theta_B^x \\ \theta_B^y \\ \theta_B^z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^x \\ R^y \end{pmatrix} \quad \text{これを変形して} \quad (\Delta_A^e, \Delta_B^e)^T = (\theta_A^e, \theta_B^e)^T + (D_0)^{-1} (H_0) (R^x, R^y)^T \quad (5)$$

$$\text{ただし } (\Delta_A^e, \Delta_B^e)^T = (\Delta_A^x, \Delta_A^y, \Delta_A^z, \Delta_B^x, \Delta_B^y, \Delta_B^z)^T$$

$$(\theta_A^e, \theta_B^e)^T = (\theta_A^x, \theta_A^y, \theta_A^z, \theta_B^x, \theta_B^y, \theta_B^z)^T$$

$$(H_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$i (i=x, y, z)$ 軸に関するヒンジをA端に作り、 i 軸廻りの単位接線角 $\theta_A^i = 1$ を与えたときの定点N

の変位ベクトルを Δ_N^{Ai} とする。(図-4(a)参照)。一方、N 点に単位集中荷重 P を働かせ、材端 A に生じる i 軸廻りの端モーメントを C_{AB}^i とする(図-4(b)参照)。両系について仮想仕事の原理を適用すれば

$$\left. \begin{aligned} (P^x e^x) \cdot (\Delta_N^{Ai} e^i) &= \tau_A^i \times C_{AB}^i, p^x=1 \\ (P^y e^y) \cdot (\Delta_N^{Ai} e^i) &= \tau_A^i \times C_{AB}^i, p^y=1 \\ (P^z e^z) \cdot (\Delta_N^{Ai} e^i) &= \tau_A^i \times C_{AB}^i, p^z=1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)に $\tau_A^i = 1$, $P^x = P^y = P^z = 1$ を代入のうえ整理すれば

$$\Delta_N^{Ai} = (U_{Ai})(e^i), \quad \text{同様に} \quad \Delta_N^{Bi} = (U_{Bi})(e^i) \quad (7)$$

$$\text{ここに} (U_{Ai}) = (C_{AB}^i)_{p^x=1}, (C_{AB}^i)_{p^y=1}, (C_{AB}^i)_{p^z=1}, \quad (U_{Bi}) = (C_{BA}^i)_{p^x=1}, (C_{BA}^i)_{p^y=1}, (C_{BA}^i)_{p^z=1}$$

以上 2, (1), (2)および(3)の諸考察より、一般に部材 AB の両材端の接線角ベクトルが τ_A, τ_B で部材回転角ベクトルおよび部材伸縮がそれぞれ $R, \Delta l$ である場合の定点 N の変位は、節点 B の変位の影響を考慮すれば重ね合わせの原理より次式で与えられる。

$$\Delta_N = \left\{ \sum_i (U_{Ai}) \tau_A^i + \sum_j (U_{Bj}) \tau_B^j + (U_R)(R^x, R^y)^T + (U_l) \Delta l \right\} (e^i) + (\Delta_B^i) (e^x, e^y, e^z)^T$$

$$\text{ただし} \quad \Delta_B^i = (\Delta X_B, \Delta Y_B, \Delta Z_B)^T$$

上式に式(5)を代入のうえ整理すれば、結局次のごとく所要の影響線縦距決定式が求められる。

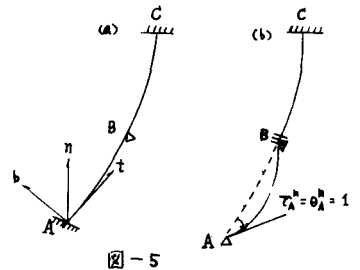
$$\Delta_N = \left\{ \sum_i (U_{Ai}) \theta_A^i + \sum_j (U_{Bj}) \theta_B^j + (U_R)(R^x, R^y)^T + (U_l) \Delta l \right\} (e^i) + (D_0) (\Delta_B^i) (e^i) \quad (8)$$

$$\text{ここに} (U_R) = (U_R) + (U_{RAx}, U_{RAy}, U_{Rz}, U_{RBx}, U_{RBy}, U_{RBz}) (D_0)^{-1} (H_0)$$

3. 解法

Müller-Breslau の原理に基づく影響線解法では、周知のごとく曲げモーメントの影響線には単位部材回転角 $\theta = 1$ と、せん断力、軸力および反力の影響線に対してはそれぞれの方に単位長さの相対変位 $\Delta = 1$ を与えてえられる弾性線を求めればよい。すなわち 1 例として図-5(a)の任意形連続ばりに対して n 軸に関する材端モーメント影響線 M_{AB}^n -line を式(8)の影響線縦距決定式を用いて求めれば次のごとくである。

(1) まず材端 A に n 軸に関するヒンジを形成し、材端 B を固定したまま $\theta_A^n = 1$ の回転角を与えて拘束する(図-5(b)参照)。このとき生じる拘束モーメントベクトル M_{AB}, M_{BA} を次に示す一般三次元たわみ角式⁽⁴⁾である式(9)で求めれば $(M_{AB}, M_{BA})^T = (EK\theta) (e_A^x, e_B^x)^T$ となる。
 ただし $(EK\theta) = \begin{bmatrix} EK\theta_{12} & & \\ & \ddots & \\ & & EK\theta_{62} \end{bmatrix}$ なる対角行列である。



(2) 拘束を解き、上記拘束モーメントをバランスさせ、そのときの θ_A^E, θ_B^E を式(9)を用いて算定する。すなわち、各材端の回転角および変位ベクトル Δ (本例では零となる)が既知となるゆえ、式(2)より R^x, R^y および Δl がわかり、したがってこれらの値を式(8)に代入することによって所要の縦距 Δ_N すなわち M_{AB}^n -line が算出可能となる。

ここに一般三次元たわみ角式は Stiffness Matrix を $(EK\theta_{ij})$ 、荷重項を C^E, P^E で表わせば文献(1)より次のごとく与えられる。

$$\begin{pmatrix} M_{AB}^E \\ M_{BA}^E \\ \frac{1}{2}F_{AB}^E \\ \frac{1}{2}F_{BA}^E \end{pmatrix} = EK \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{12} \\ & \ddots & \\ & & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_A^E \\ \theta_B^E \\ \Delta_1/\ell_0 \\ \Delta_2/\ell_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{AB}^E \\ C_{BA}^E \\ \frac{1}{2}F_{AB}^E \\ \frac{1}{2}F_{BA}^E \end{pmatrix}$$

$$(9) \quad \text{ただし } (M^E) = (M^C, M^N, M^b)^T, \quad (C^E) = (C^C, C^N, C^b)^T \\ (F^E) = (F^C, F^N, F^b)^T, \quad (P^E) = (P^C, P^N, P^b)^T$$

なお、本解法はあらゆる形状部材へ適用できるが、今日設計に多用される空間部材として円筒螺旋線（ヘリコイド）を選べば表-1, 2の方向余弦は次の内容となる。

$$\bar{\ell}_1 = (r_{Ax} - r_{Bx})/\ell, \quad \bar{\ell}_2 = (r_{Ay} - r_{By})/\ell, \quad \bar{\ell}_3 = (r_{Az} - r_{Bz})/\ell, \quad \bar{m}_1 = \sin\alpha = \cos(\varphi/2), \quad \bar{m}_2 = \cos\alpha = \sin(\varphi/2), \quad \bar{m}_3 = 0$$

$$\bar{n}_1 = (r_{Az} - r_{Bz})/\ell = \sin(\varphi/2), \quad \bar{n}_2 = (r_{Ax} - r_{Bx})/\ell \cdot \sin(\varphi/2) - (r_{Ay} - r_{By})/\ell \cdot \cos(\varphi/2),$$

$$\bar{\ell}_1 = -\cos\beta \sin\varphi, \quad \bar{\ell}_2 = -\cos\varphi, \quad \bar{\ell}_3 = \sin\beta \sin\varphi, \quad m_1 = \cos\beta \cos\varphi, \quad m_2 = -\sin\varphi, \quad m_3 = -\sin\beta \cos\varphi,$$

$$n_1 = \sin\beta, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \cos\beta \quad \text{ただし } \beta \text{ は } A \text{ 端での } z \text{ 軸と } x-y \text{ 平面とのなす角で、いわゆるヘリコイドアングルの相当する。}$$

4. 計算例

図-6に示すとき2主桁2スパン矩形等断面のヘリコイド格子桁を対象に選び、Z軸方向の荷重に対するMohr-lineを上記解法に基づいて算出した結果を図-7に示す。ただし、支点E, FはZ軸方向のみ回転を許すものとし水平角 φ 、ヘリコイドアングル β はそれぞれ0.6, 0.2ラジアンとする。

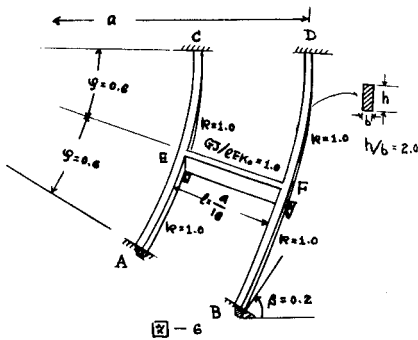


図-6

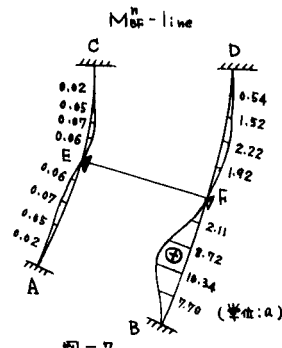


図-7

5. あとがき

本論文は軸線の三次元的に変化する空間部材をもつ任意形立体ラーメンの影響線算定法を確立したもので、影響線縦距決定式の係数を部材各分点で算定し、3で提示した解法とともにプログラミングすることによりかかる構造物に対する所要の影響線をすべて簡単に求め、また縦距決定式の係数を数表化することにより手計算によっても影響線を容易に求める。

文献(1) TOKUYA YAMASAKI and Toshiaki OHTA: Three-Dimensional Slope-Deflection Equation of Noncoplanar Member, Proceedings of the 14th J.N.C for A.M, 1964, December, 1965.