

京都大学工学部 正員 工博 小西一郎

京都大学工学部 正員 工博 白石成人

京都大学工学部 学生員 工修 玉村三郎

1. まえがき

変形法による骨組構造物の静的解析において、骨組によって構成されるネットワークのもつトポロジ的性質、いわゆるネットワークトポロジーを利用することにより電子計算機による解析に適した組織的、能率的な解法を確立するための基礎的研究が、近年、行なわれるようになった。⁽¹⁾⁽³⁾

これらの研究の応用の一環として、支持端を固定とした立体ラーメンを対象とし、その変形法にもとづく解法をW.R. Spiller⁽¹⁾にしたがって、変形節点接続行列(Modified Incidence Matrix)をもちいて表わし、A.S. Householder⁽²⁾による逆行列計算法をくり返し適用することにより、フレキシビリティ・マトリックスを求める新しい計算法を確立する。

2. 基礎式の変形節点接続行列による表現および、その解法⁽¹⁾

立体ラーメンの、支持端を除く節点、および、部材に対し支持端より鉛直上方に向って、順番に番号をつける。

座標系を第1図のようにとるものとする。 i 部材のA-5を座標系の基準座標系O-xyzに関する回転を表わすマトリックスを Λ_i 、 i 部材のB端にはたらく単位の大きさの軸方向力、せん断力がA点に関してのもつモーメントの5(5軸)方向成分を表わすマトリックスを X_i とすると

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_{55}^i & \mu_{55}^i & \nu_{55}^i \\ \lambda_{54}^i & \mu_{54}^i & \nu_{54}^i \\ \lambda_{53}^i & \mu_{53}^i & \nu_{53}^i \end{bmatrix} \quad X_i = \begin{bmatrix} 0, 0, 0 \\ l_i \lambda_{55}^i, l_i \mu_{55}^i, l_i \nu_{55}^i \\ -l_i \lambda_{54}^i, -l_i \mu_{54}^i, -l_i \nu_{54}^i \end{bmatrix} \quad l_i: i \text{部材長}$$

$(\lambda_{55}^i, \mu_{55}^i, \nu_{55}^i)$: 5軸のxyz軸に関する方向余弦

第1図 座標系

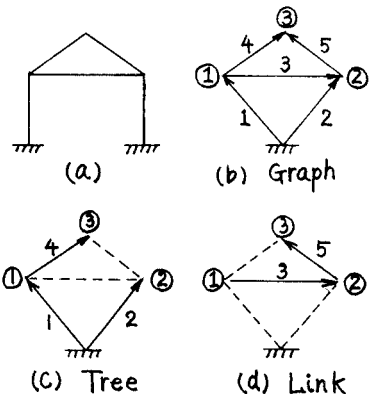
部材と節点の結合状態を表わすグラフ(Graph)をつくりグラフを規定する、いくつかの行列を定義する。⁽¹⁾⁽³⁾

節点接続行列 $A(a_{ij})$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \cdots i \text{部材の始端が} j \text{節点に接続しているとき} \\ -1 \cdots \text{の終端が} \text{ " } \text{ " } \text{ " } \text{ " } \\ 0 \cdots i \text{部材が} j \text{節点に接続していないとき} \end{cases}$$

グラフを、その中に網路(Loop)をもたないTreeと、残りのLinkに分け、T, Lの添字をつけて表わすと

$$A = \begin{bmatrix} A_T \\ A_L \end{bmatrix} \quad \text{第2図(c)(d)において} \quad A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_L = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



第2図

B_T 行列 (Node-to-datum path matrix) $B_T(b_{ij})$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & i \text{ 部材が } j \text{ 節点から支持点への経路に含まれ, 同じ向き のとき} \\ -1 & \text{ " " " " " " 逆の向き のとき} \\ 0 & \text{ " " " " " " への経路に含まれないとき} \end{cases}$$

第2図(c)において

$$B_T = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

一般に, A_T と B_T との関係は次式で与えられる⁽³⁾。

$$A_T^{-1} = B_T^t \dots \dots \dots (1)$$

電気のネットワーク解析の場合は, これらの行列を, そのまゝの形で用いることができるが, 立体ラーメンの場合は, 1 節点に 6 変位, 力をもたうので, 部材の位置, 方向に応じて, つぎのように変形する⁽¹⁾。

変形節点接続行列 A

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} \Lambda_i & 0 \\ 0 & \Lambda_i \end{bmatrix} \\ a_{ij} = -1 \rightarrow -\begin{bmatrix} \Lambda_i & X_i \\ 0 & \Lambda_i \end{bmatrix} \\ a_{ij} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

B_T 行列

$$\begin{cases} b_{ij} = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} \Lambda_i & 0 \\ 0 & \Lambda_i \end{bmatrix} \\ b_{ij} = -1 \rightarrow -\begin{bmatrix} \Lambda_i & 0 \\ X_i & \Lambda_i \end{bmatrix} \\ b_{ij} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_T \\ A_L \end{bmatrix} \text{ とすれば } A_T^{-1} = B_T^t \dots \dots \dots (2)$$

変形法による基本式を A を用いて表わすと⁽¹⁾

$$D = (A^t K A)^{-1} P \text{ ここで } \dots \dots \dots (3)$$

$$\begin{matrix} \text{節点変位 } D = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{Bmatrix} & D_i = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} & \text{荷重 } P = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{Bmatrix} & P_i = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

i は節点番号

$K = [K_j]$ K_j は j 部材の終端を固定したときのスティフネス・マトリックスである。

$$\text{Householder によれば}^{(2)} \quad (Z + A^t K A)^{-1} = Z^{-1} - Z^{-1} A^t (A Z^{-1} A^t + K^{-1})^{-1} A Z^{-1} \dots (4)$$

この式を適用すると

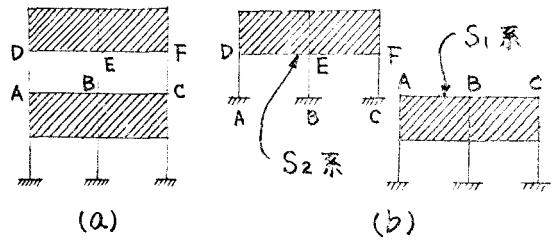
$$(A^t K A)^{-1} = F - F A_L^t (A_L F A_L^t + K_L^{-1})^{-1} A_L F \dots (5)$$

ここで $F = (A_T^t K_T A_T)^{-1} = B_T^t K_T^{-1} B_T$, $K = \begin{bmatrix} K_T & 0 \\ 0 & K_L \end{bmatrix}$

F は, トポロジーの性質を利用することにより求められる。したがって, 逆行列として, Link のスティフネス・マトリックスと同じ次元のものを求めるだけでよい。

3. 立体ラーメンの新しい解法

立体ラーメンのフレキシビリティ・マトリックスを求めるために、第3図(b)のように、節点A, B, Cで分割し、切断点を固定して、 S_1 , S_2 の独立したラーメンとして解析し、この結果をつかって、全体のラーメンのフレキシビリティ・マトリックスを求めるものである。



第3図

斜線の部分はい任意の大きさのラーメンをしめす

変形節点接続行列

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

S_2 の変形節点接続行列

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

S_1 のフレキシビリティ・マトリックス

$$F_1 = \begin{bmatrix} Z_d, Z_c \\ Z_b, Z_a \end{bmatrix}$$

S_2 の " " " "

$$F_2 = \begin{bmatrix} Z_h, Z_g \\ Z_f, Z_e \end{bmatrix}$$

S_2 部材の終端を固定したときのステイフネスマトリックス

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}$$

$k_2: m \times m$ 行列

S_2 部材の " " フレキシビリティ・マトリックス

$$Z_2 = \begin{bmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & f_1 \end{bmatrix}$$

$f_2: m \times m$ 行列

S_1 部材の " " のステイフネス・マトリックス: K_1

$$(A^t K A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} A_1^t & C^t \\ 0 & A_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} A_1^t K_1 A_1 & 0 \\ 0 & A_2^t K_2 A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^t K_2 C & C^t K_2 A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} A_1^t K_1 A_1 & 0 \\ 0 & A_2^t K_2 A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A_2^t \end{bmatrix} [K_2] [C, 0] + \begin{bmatrix} C^t \\ 0 \end{bmatrix} [K_2] [C, A_2] \right)^{-1}$$

上式にHouseholderの式をくり返し適用すると

$$(A^t K A)^{-1} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [Z_b, Z_a]^t d_1 [Z_b, Z_a], & [Z_b, Z_a]^t d_2 [Z_h, Z_g] \\ [Z_h, Z_g]^t d_2^t [Z_b, Z_a], & [Z_h, Z_g]^t d_3 [Z_h, Z_g] \end{bmatrix} \dots (6)$$

ここで

$$F_1 = (A_1^t K_1 A_1)^{-1} \begin{bmatrix} Z_a, Z_c \\ Z_b, Z_a \end{bmatrix} \quad F_2 = (A_2^t K_2 A_2)^{-1} \begin{bmatrix} Z_h, Z_g \\ Z_f, Z_e \end{bmatrix}$$

$$d_2 = (C_1 Z_a C_1^t + C_2 Z_h C_2^t \cdot k_2 \cdot C_1 Z_a C_1^t + f_2)^{-1}$$

$$d_1 = d_2 - d_2 \cdot C_2 Z_h C_2^t \cdot k_2$$

$$d_3 = k_2 \cdot C_1 Z_a C_1^t \cdot d_2$$

この式をくり返し用いることにより、つぎつぎにラーメンを拡大していくことができる。

また、分割の方法をかえることにより、逆行列の次元を増減できる。

解法の手順

- (1) データとして、節点接続行列、部材長、断面の各常数、 Λ_i 、荷重、分割点の節点番号を与える。
- (2) 変形節点行列の計算、および K_1 , K_2 の計算。
- (3) $A_1^t K_1 A_1$, $A_2^t K_2 A_2$ から F_1 , F_2 を任意の方法により計算。Tree と Link による方法がよい。
- (4) F_1 , F_2 から全体のフレキシビリティ・マトリックス F を求める。
- (5) 分割数が多い場合、以上の計算をくり返す。

4. 結 言

- (1) データを最小限のものとし、任意形状の立体ラーメンを同一プログラムで処理できる。
- (2) 不静定次数が高くなる場合でも、電子計算機の容量に応じて分割数をかえ、各部分の計算を独立に行なうことができるので、連鎖仕事 (Chain job) 方式により処理できる。
- (3) これは、立体ラーメンの問題のみでなく、ネットワークの問題へのアナロジーが成立する他の問題に応用できる。連続体を discrete な系によって解析する場合への応用が可能であると考え。(検討中)。
- (4) 節点接続行列という、よぶんな行列を扱うので、必要なメモリの増加が考えられる。しかし、その要素は 1, -1, 0 であるので 1 語 (32 ビット) の中に 16 ~ 32 語を貯え 1 ビットごとに操作するプログラム言語、例えば、日立の HITAC 5020 の HISAP を使用することにより、ある程度、解決できる。

参考文献

1. F. L. DiMaggio & W. R. Spiller "Network Analysis of Structures" E.M. Proc. ASCE. Vol 91 (1965) Jun. pp 169-188
2. A. S. Householder "A Survey of Some Closed Method for Inverting Matrices" Journal of Soc. of Ind. and Appl. Math. 1958
3. S. J. Fenves & F. H. Branin "Network-Topological Formulation of Structural Analysis" S.T. ASCE. Vol 92 (1966) Feb. pp 199-221