I －39　　地中埋設管の熱変形と応力

電力中央研究所　正員　色部　誠

地中に埋設された長い鋼管が、内挿物の発熱によって起す熱変形は、これまで理論的にほとんどしらべられていない。曲げ剛性に比し非常に長い管に対しての第1近似として、はりの理論から管軸方向ならびに軸に直角な方向の力のつり合いをあらわす連立微積分方程式を求め、それによって若干の数値計算を行なってみた。以下に、式の誘導と解法とを述べる。

1. 基本仮定

i. 管は長さlのスパンをもっていて、一端は固定、他の一端はバネ常数Kなる軸方向バネによって拘束されているものとする。またバネ支承端で管にたわみ角は起らないものとする。

ii. 管は周面において地盤係数kによって拘束されているものとする。

iii. 管は軸方向の変位に対して摩擦係数pにてあらわされる周面摩擦の拘束をうけているものとする。

iv. 管壁の温度分布Tは管軸方向に変化を有する。また管軸に直角な断面内では左右対称であって、鉛直方向に変化を有する。

v. 管の変形ならびに応力は微小変形理論にしたがうものとする。

vi 管の変形がはりの曲げ理論にて充分近似し得るほどに、管長は曲げ剛性に比しきわめて長いものとする。

2. 元弯曲のない埋設管に対する基礎方程式

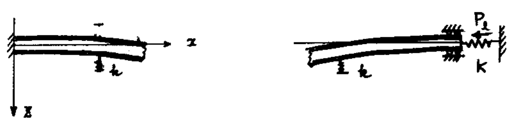
断面内でT℃の温度上昇を生じた場合のはりの応力・ひずみ式は、Eを弾性係数、αを線膨張係数とすれば

$$E e_x = \sigma_x + \alpha E T \qquad (1)$$

である。はりに曲げが起れば、微小変形の仮定から、断面内のひずみは

$$e_x = \bar{e}_x - z\kappa = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 - z\frac{d^2w}{dx^2} \qquad (2)$$

によって求まる。$\bar{e}_x$は曲げをともなう場合のはりの中立軸のひずみであり、κは変形軸線の曲率である。



バネ支承端での軸方向反力をP_lとすれば、はりの曲げ理論から次式を得る。

$$-EI\frac{d^2w}{dx^2} = P_l w + M + M_T \qquad (3)$$

Mは、はりに対しz方向に作用する外力$q(x)$による曲げモーメントであり、M_Tは断面内の温度分布Tによる温度モーメントであって、次式によってあらわされる。

$$M_T = \int_A \alpha E T z \, dA \qquad (4)$$

(3)式をxについてさらに2回微分し、次式を得る。

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) + P_l\frac{d^2w}{dx^2} = q(x) - \frac{d^2M_T}{dx^2} \qquad (5)$$

はりが地中にある場合、上にのる土の重量とはりの自重は鉛直反力とつり合うので、(5)式中の $q(x)$ は変形 w によって生ずる地盤反力のみからなると見なせる。　よって $q(x) = -kw$ を(5)式に用い

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) + P_\ell\frac{d^2w}{dx^2} + kw = -\frac{d^2M_T}{dx^2}} \tag{6}$$

を得る。

つぎに軸方向の力のつり合いを考える。　(1), (2)式より得られる応力・変位式

$$\sigma_x + \alpha E T = E\left\{\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 - z\frac{d^2w}{dx^2}\right\} \tag{7}$$

を断面内で積分する。　その際、断面に働く軸力を $P(x)$、軸方向の平均応力を $\bar{\sigma}_x$ とすれば、$\frac{P(x)}{A} = -\bar{\sigma}_x$ であることに注意し、温度スラスト P_T を

$$P_T = \int_A \alpha E T\, dA \tag{8}$$

によって定義すれば、(7)式の積分より次式を得る。

$$-P(x) + P_T = EA\left\{\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\} \tag{7'}$$

$\frac{du}{dx}$ を 0 から ℓ まで軸に沿って積分すれば、バネ支承端での変位 u_ℓ が得られる。　よって、

$$\int_0^\ell \frac{du}{dx}\,dx = \frac{P_\ell}{K} \tag{9}$$

がなりたつ。　はりの x 断面にはたらく軸力 $P(x)$ は P_ℓ と支承端から x 断面までのあいだに作用する軸方向の周面摩擦力との和である。　すなわち

$$P(x) = P_\ell + \rho\int_x^\ell |q(x)|\,dx = P_\ell + \rho\cdot k\int_x^\ell |w|\,dx \tag{10}$$

(7')式を 0 から ℓ まで x について積分し、(9), (10)式をこれに用いれば

$$\boxed{\left(\ell + \frac{EA}{K}\right)P_\ell + \rho\cdot k\int_0^\ell\!\!\int_x^\ell |w|\,d\xi\,dx + \frac{EA}{2}\int_0^\ell\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx = \int_0^\ell P_T\,dx} \tag{11}$$

を得る。　上に求めた(6)式は図1の系において、z 方向の力のつり合いを、(11)式は x 方向の力のつり合いを意味するものである。　これらは w および P_ℓ を未知量とする非線型の連立微積分方程式である。　これらの方程式を境界条件

$$\left.\begin{array}{ll} x=0\ \text{で} & w = \dfrac{dw}{dx} = 0, \\ x=\ell\ \text{で} & w = \dfrac{dw}{dx} = 0 \end{array}\right\} \tag{12}$$

のもとで解くことを考える。

3. 方程式の解法

3-1. $\frac{d^2M_T}{dx^2} = 0$ の場合

(6)式は斉次型

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) + P_\ell\frac{d^2w}{dx^2} + kw = 0 \tag{6'}$$

となる。　以下、EI を一定として考える。

i.　$P_\ell < 2\sqrt{kEI}$ の場合

(6)' の一般解は

$$w = e^{-\alpha x}(B_1\sin\beta x + B_2\cos\beta x) + e^{\alpha x}(B_3\sin\beta x + B_4\cos\beta x) \tag{13}$$

で与えられる。　ただし、α, β は次式によって定まる。

$$\begin{matrix}\alpha,\\ \beta\end{matrix} = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}\sqrt{1 \mp \frac{P_l}{2\sqrt{kEI}}} \tag{14}$$

(13)式を境界条件式(12)に入れれば、B_1, B_2, B_3, B_4 に関して、つぎの4式を得る。

$$\left.\begin{aligned}
&B_2 + B_4 = 0, \qquad \beta B_1 - \alpha B_2 + \beta B_3 + \alpha B_4 = 0,\\
&e^{-\alpha l}(B_1 \sin\beta l + B_2 \cos\beta l) + e^{\alpha l}(B_3 \sin\beta l + B_4 \cos\beta l) = 0,\\
&-\alpha e^{-\alpha l}(B_1 \sin\beta l + B_2 \cos\beta l) + \beta e^{-\alpha l}(B_1 \cos\beta l - B_2 \sin\beta l) + \alpha e^{\alpha l}(B_3 \sin\beta l + B_4 \cos\beta l) + \beta e^{\alpha l}(B_3 \cos\beta l - B_4 \sin\beta l) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

これは B_1, B_2, B_3, B_4 に関して同次式であるから、$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0$ か、これらが0でないためには、(15)式の係数行列式が0でなくてはならない。まえの場合には $w = 0$ となり、(11)式よりただちに

$$P_l = \frac{1}{l + \frac{AE}{K}}\int_0^l P_T\,dx \tag{16}$$

を得る。また自重、上載荷重による周面摩擦力を無視すれば、熱応力はつぎのようになる。

$$\sigma_x = -\frac{P_l}{A} + \frac{P_T}{A} - \alpha ET \tag{17}$$

あとの場合、(15)式の係数行列式が0でなくてはならないという条件から、α, β のあいだに

$$\alpha^2 \sin^2\beta l - \beta^2 \sinh^2\alpha l = 0 \tag{18}$$

の関係を得、これより

$$\alpha \sin\beta l = \beta \sinh\alpha l \quad (18)\text{-}1, \qquad \text{または} \qquad \alpha \sin\beta l = -\beta \sinh\alpha l \quad (18)\text{-}2$$

がなりたつ場合にのみ、たわみ w を生ずる。しかし、前提 $P_l < 2\sqrt{kEI}$ すなわち $\alpha > 0$ に対してはこれらの関係はなりたたない。(18)-1 は α が0、(18)-2 は α が虚数でなければなりたたない。$\alpha = 0$ とは $P_l = 2\sqrt{kEI}$、α が虚数であるとは $P_l > 2\sqrt{kEI}$ を意味する。

ii. $P_l = 2\sqrt{kEI}$ の場合

これは(6)'式に $w = e^{\lambda x}$ を用いて得られる特性式が2組の等根を有する場合である。したがって、(6)'式の一般解は(13)式とは異り

$$w = B_1 \sin\beta x + B_2 \cos\beta x + B_3 x \sin\beta x + B_4 x \cos\beta x \tag{19}$$

となる。これを(12)式に用い、i と同様に積分常数が0でない場合を考えると、$\beta = 0$ の条件式が導かれる。これは $k = 0$ のときになりたつ。よって本題において地盤係数が無視されるという特殊の場合であって、これについては植村[1)]が論じているので、ここには触れない。

iii. $P_l > 2\sqrt{kEI}$ の場合

α が虚数 $i\bar{\alpha}$ であらわされる場合、$\sinh\alpha l = i\sin\bar{\alpha} l$ であるから、(18)-1, 2 両式から

$$\bar{\alpha} \sin\beta l = \pm\beta \sin\bar{\alpha} l \tag{20}$$

を得る。$\begin{matrix}\bar{\alpha},\\ \beta\end{matrix} = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}\sqrt{\frac{P_l}{2\sqrt{kEI}} \mp 1}$ であるから、所与の k, E, I に対して(20)式を満足する P_l を求めることができる。この P_l が座屈荷重(反力) P_{lcr} であり、さらに(11)式の関係を用いて座屈温度 T_{cr} を定めることができる。解の誘導はつぎのとおりである。一般解を

$$w = B_1 \sin\bar{\alpha}x \sin\beta x + B_2 \sin\bar{\alpha}x \cos\beta x + B_3 \cos\bar{\alpha}x \sin\beta x + B_4 \cos\bar{\alpha}x \cos\beta x \tag{21}$$

のようにあらわせば、(20)式を用い、境界条件を満足する解として

$$w = \frac{B}{\sin\bar{\alpha}l}\left\{\sin\beta x \sin\bar{\alpha}(l-x) \mp \sin\bar{\alpha}x \sin\beta(l-x)\right\} \qquad (\text{複号は(20)式と同順}) \tag{22}$$

を得る。　式中に残された積分常数Bは、軸方向の力のつり合い式(11)から求まる。(11)式に(22)式を代入し、

$$\rho\cdot k\int_0^l\int_x^l|w|\,d\xi\,dx=\rho\cdot k\cdot f(\bar{\alpha},\beta)\cdot B,\qquad \frac{EA}{2}\int_0^l\left(\frac{dw}{dx}\right)^2dx=\frac{EA}{2}\cdot g(\bar{\alpha},\beta)\cdot B^2 \tag{23}$$

とおけば、

$$\frac{EA}{2}\,g(\bar{\alpha},\beta)\cdot B^2+\rho\cdot k\cdot f(\bar{\alpha},\beta)B+\left\{\left(l+\frac{EA}{K}\right)P_l-\int_0^l P_T\,dx\right\}=0 \tag{24}$$

を得る。　Bは実数でなければならないから、

$$\rho^2\cdot k^2 f(\bar{\alpha},\beta)^2-2EA\cdot g(\bar{\alpha},\beta)\left\{\left(l+\frac{EA}{K}\right)P_l-\int_0^l P_T\,dx\right\}\geqq 0 \tag{25}$$

これより、P_T の下限すなわち P_{lcr} に対する P_{Tcr}

$$\int_0^l P_{Tcr}\,dx=\left(l+\frac{EA}{K}\right)P_{lcr}-\frac{\rho^2k^2\,f(\bar{\alpha},\beta)^2}{2EA\,g(\bar{\alpha},\beta)} \tag{26}$$

を得る。　(25)式の等号に対して、Bはつぎのように定まる。

$$B=-\frac{\rho\cdot k\cdot f(\bar{\alpha},\beta)}{E\cdot A\cdot g(\bar{\alpha},\beta)} \tag{27}$$

以上によってwが決定された。　wを(7)、(10)式に用い、つぎの応力式を得る。

$$\sigma_x=-\frac{P_{lcr}-\rho\cdot k\cdot\int_x^l|w|\,d\xi}{A}+\frac{P_{Tcr}}{A}-\alpha E T_{cr}-Ez\frac{d^2w}{dx^2} \tag{28}$$

3-2. $\dfrac{d^2M_T}{dx^2}=C_1x+C_2$ の場合.

この場合(6)式の一般解は

$$w=e^{-\alpha x}(B_1\sin\beta x+B_2\cos\beta x)+e^{\alpha x}(B_3\sin\beta x+B_4\cos\beta x)-\frac{1}{k}(C_1x+C_2) \tag{29}$$

で与えられる。　これを境界条件(12)式に用い、

$$\left.\begin{aligned}&B_2+B_4=\frac{C_2}{k},\qquad \beta B_1-\alpha B_2+\beta B_3+\alpha B_4=\frac{C_1}{k},\\&e^{-\alpha l}(B_1\sin\beta l+B_2\cos\beta l)+e^{\alpha l}(B_3\sin\beta l+B_4\cos\beta l)=\frac{C_1l+C_2}{k},\\&-\alpha e^{-\alpha l}(B_1\sin\beta l+B_2\cos\beta l)+\beta e^{-\alpha l}(B_1\cos\beta l-B_2\sin\beta l)+\alpha e^{\alpha l}(B_3\sin\beta l+B_4\cos\beta l)+\beta e^{\alpha l}(B_3\cos\beta l-B_4\sin\beta l)=\frac{C_1}{k}\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

を得る。　(11)式に(29)式を用い、

$$\int_0^l\int_x^l|w|\,d\xi\,dx=\varphi(\alpha,\beta,B_1,B_2,B_3,B_4),\qquad \int_0^l\left(\frac{dw}{dx}\right)^2dx=\psi(\alpha,\beta,B_1,B_2,B_3,B_4) \tag{31}$$

とおけば、B_1,B_2,B_3,B_4 に関しての2次の多項式

$$\left(l+\frac{EA}{K}\right)P_l+\rho\cdot k\cdot\varphi(\alpha,\beta,B_1,B_2,B_3,B_4)+\frac{EA}{2}\psi(\alpha,\beta,B_1,B_2,B_3,B_4)=\int_0^l P_T\,dx \tag{32}$$

を得る。　(30)、(32)式を連立させ、P_l, B_1, B_2, B_3, B_4 を決定できれば解が定まる。　これらの未知量の決定にはつぎの方法がとられる。

はじめに、(32)式中の φ, ψ を0とし、与えられた温度条件のもとで、P_l の第1近似 $P_l^{(1)}$ を求め、これを(14)式に用いて α, β の第1近似 $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$ を定める。　得られた $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$ を(30)式に用い、同式を B_1, B_2, B_3, B_4 に関する連立方程式とみ、これを解いて第1近似 $B_1^{(1)}$, $B_2^{(1)}$, $B_3^{(1)}$, $B_4^{(1)}$ を求める。　かくして、$w^{(1)}$ がきまれば(31)式によって $\varphi^{(2)}$, $\psi^{(2)}$ を求め、これらを(32)式に用いてあらたに第2近似 $P_l^{(2)}$ を定め、上と同様の手順によって $B_1^{(2)},\cdots,B_4^{(2)}$ を求める。　以下同じ手続きを繰り返して、(30)、(32)式の近似解を得る。　これらが解ければ、たわみ形 w および応力 σ_x は(29)ならびに(7)式によって求められる。

文献 1) 植村益次：加熱棒の変形と熱応力、機械学会論文集 vol. 26, No. 164. 昭 35. 4