I −38　　弾性床上の鋼管について

東大生研　正員　久保慶三郎
〃　学生員　○前野陽治

従来弾性床上の梁の問題は、地盤反力が梁の変位の1次関数であると仮定して解かれている。この仮定はこれまで種々の研究によりある範囲内で成り立つことが確められている。この仮定により、重ね合わせの原理の適用が保証され、弾性床上の梁の問題はかなり簡略化される。しかしそれにしても個々の場合につき、弾性曲線の微分方程式を満足し、更に境界条件を満たすような解を求めるのはかなり骨の折れることであるし、また地盤の物理的性質がこのような簡単な関係によっては十分精確に表わしきれないことも明かである。そこで筆者らはマトリックス法を用いて、等間隔のバネによって支持されている梁として問題を解いた。その際、地盤反力が変位の2次関数であると仮定し、この計算結果を、砂の上に置かれた鋼管の静的曲げ試験の結果と比較したところ、計算値と実験値は良い一致を示した。

実験1.　水締めを行なった砂の上に長さ10m, 外径26.74cm, 厚さ0.64cmの円形鋼管を置き中央点に荷重をかけた。鋼管の中央部分に補剛板を溶接し局部的な変形を防止した為に、たわみ曲線は滑かな曲線になっている。

計算1.　計算は、i) バネ定数kがたわみに対して一定, ii) kがたわみに比例する、即ち地盤反力がたわみの2次関数である、の2つの仮定について行なった。実験の系をモデル化し、50cmの等間隔に配置された21個のバネによって支持された梁と考え、荷重系とたわみ系の関係を求める。集中荷重, モーメント, バネが支持している点のたわみを表わすマトリックスをそれぞれ $\mathbb{P}, \mathbb{M}, \Delta$ で表わす。バネが支持している点で切った梁の釣合を考えると　$\mathbb{P}=\frac{1}{\lambda}\mathbb{A}\cdot\mathbb{M}$　(λはバネの間隔) —(1)

また差分法を用いると　$\mathbb{B}\cdot\mathbb{M}=\frac{6EI}{\lambda^2}\mathbb{C}\cdot\Delta$ —(2)

という関係が得られる。ここで $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ は確定した21次正方係数行列である。(1), (2)より

$\mathbb{P}=\frac{6EI}{\lambda^3}\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}^{-1}\cdot\mathbb{C}\cdot\Delta=\frac{6EI}{\lambda^3}\mathbb{K}\cdot\Delta$ が得られるが、ここで集中荷重系Pを、外部荷重系$\mathbb{W}$とバネの反力系$\mathbb{R}$に分割し、方向を考慮して $\mathbb{P}=\mathbb{W}-\mathbb{R}$ とすれば

$$\mathbb{W}-\mathbb{R}=\frac{6EI}{\lambda^3}\mathbb{K}\cdot\Delta \qquad —(3)$$

i) $\mathbb{R}=k\Delta$と仮定すれば　$\mathbb{W}=\left[\frac{6EI}{\lambda^3}\mathbb{K}+k\mathbb{E}\right]\cdot\Delta \quad \therefore \Delta=\left[\frac{6EI}{\lambda^3}\mathbb{K}+k\mathbb{E}\right]^{-1}\cdot\mathbb{W}$ —(4)

(4)式によってΔを求め、$\Delta<0$なる個所のバネについては$k=0$とし、$k>0$で$\Delta>0$, $k<0$で$\Delta<0$となるまで計算をやり直す。これで浮き上った梁の部分にはバネが働かないということが計算上実行される。　ii) 次に反力RとたわみΔの間に次の2次の関係を仮定する。

$$\Delta<0 \text{ で } R=0, \quad \Delta>0 \text{ で } R=K_1\Delta^2+K_2\Delta$$

これを(3)式に入れると次のようになる。　$W-K_1\Delta^2-K_2\Delta=\frac{6EI}{\lambda^3}\mathbb{K}\Delta$ —(5)

最初に$\mathbb{R}=K_2\Delta$として2次の項を無視してΔ_1を求めて、Δ_1を利用して(5)式によって、Δがある精度にまで収束するまでくり返し計算を行う。図1には実験による値を書き、図2はバネの反力がたわみの1次関数であるとして計算した値と、2次関数であるとして計算した値とを書いてある。これから見ても明かなように、2次関数であると仮定した計算値は実験値とよく合っている。

次に荷重直下の鋼管の局部変形を許す場合について更に実験と計算を行なった。

実験2. 水締めを行なった砂の上に長さ5m，外径26.74cm，厚さ0.64cmで内部に圧力15kg/cm²の水をつめた鋼管を置き中央に集中荷重をかけた。実験1と異ってこの鋼管は載荷点部分に補剛板をつけていないので，図−3に示すたわみ曲線を示した。地盤反力はnon linearであるので，50cmの長さの実験と同じ鋼管を用いて、荷重とバネ定数との関係を実験的に求めた。

計算2. この実験の解析にあたっては、実験的に求めたバネ定数の値を用いてリダクション法によって計算した。しかし図3，図4から明かなように，実験値のたわみ曲線（パイプの上面）と計算上のたわみ曲線（中立軸）は特に荷重の大きいときに著しく異っている。これは荷重直下の鋼管の局部変形が大きく影響していると考えられるので、梁の中央点でたわみ角がその点のモーメントに比例した量だけ急変すると仮定して計算をしなおした。即ち $\varphi_{CR} = \varphi_{CL} + K M_C$ 但し φ_{CR}, φ_{CL} はそれぞれ梁の中央のすぐ左と右のたわみ角であり，M_C は中央点のモーメントである。この仮定を行なわないで計算した結果と、この仮定のもとに計算した結果を示したものが図4である。荷重が0から10 tonまではKの値は 10^{-8} が良く，10tonから20tonまでは 10^{-7} が良い。Kの単位はモーメントの逆数である。

この実験は東京電力技術研究所と共同で行なったもので，東京電力と研究室の皆さんに感謝します。

図1. 局部変形を許さない場合の実験値

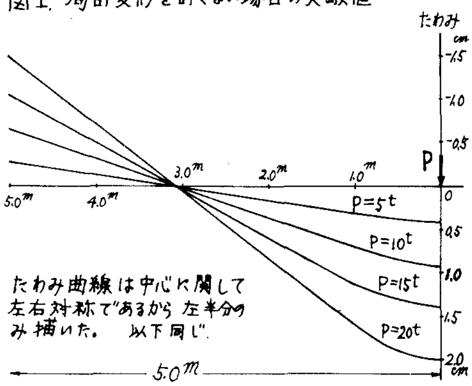

図2. 局部変形を許さない場合の計算値

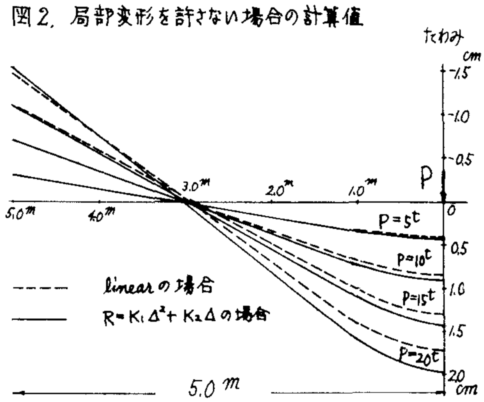

図3. 局部変形を許す場合の実験値
パイプ上面のたわみの値

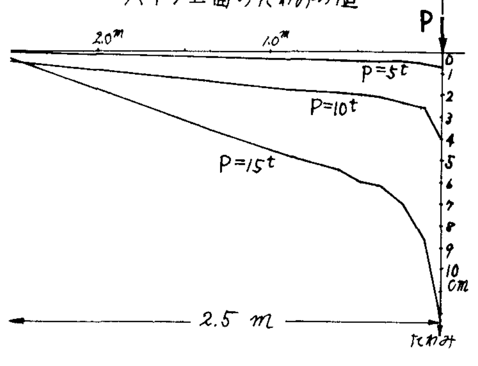

図4. 局部変形を許す場合の計算値
パイプの中立軸のたわみの値