

パイプ接合近傍における境界撓れ応力の解析

東大工学部 正員 奥村敏恵

正員 ○秋山成興

学生員 樊豊美

学生員 鳥居知

近年構造物の設計において筋肉シェル構造が積極的に取り入れられているが、空間曲率を持つ為この解析は非常に困難である。特に力学的及び幾何学的な非対称性及び不連続性は必ず撓れ応力状態を伴うので、今迄この面における研究はごく限られている。

本論文では実用上最も重要である円筒シェル構造の接合付近の境界撓れ応力状態の解析を取り上げた。(図-1)

従来この種の解析は前述の様に極めて制限の強いものである。すなわち $r/R \ll 1$ という条件を強じ用いて居る。

こうする事によって基本方程式及び境界条件を単純化しようとするものであるが、本論文ではこの条件は取り除いた。

解析の方法は先ず座標系の選択であるが、2本のパイプの交差線(以下接合線と呼ぶ事がある)に沿って各曲面に付随するゲルガー標構を用いる。すなわち接合線の単位接線ベクトル、測地法線ベクトル、法線ベクトルを座標ベクトルとして選ぶ。

又補助的なものとして空間固定の i, j, k 座標系も選んでおく。(図-2)

先ず各々のパイプの連続条件(歪の適合条件)は変位ベクトル $\vec{U}$ および回転ベクトル $\vec{\Omega}$ が2回連続微分可能という条件を用いる。すなわち

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial \alpha^4 \partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial \alpha^2 \partial \alpha^4}, \quad \frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial \alpha^4 \partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial \alpha^2 \partial \alpha^4}$$

これらの式より各座標方向の成分として表せば、各3個計6個の適合条件式が得られる。

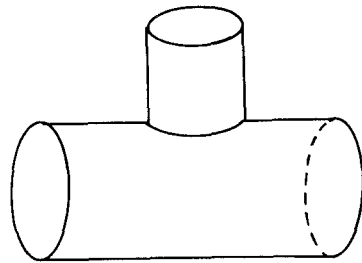


図-1

あなわち

$$c^{\alpha\delta}(\mu_{\alpha\delta} - b_{\alpha\delta}^{\gamma} \varepsilon_{\gamma\alpha}) = 0$$

$$c^{\alpha\delta} \nabla_{\delta} \varepsilon_{\gamma\alpha} + \delta_{\gamma}^{\alpha} = 0$$

$$i = 1, 2$$

ただし

∇_{δ} : intrinsic な共変微分

$c^{\alpha\beta}$: 重さ 4 の 2 階 11 成分

テンソル

$\mu_{\alpha\delta}$: 物理的曲率変化テンソル

$\varepsilon_{\gamma\alpha}$: 歪テンソル

$b_{\alpha\delta}$: 曲面の法曲率テンソル

δ_j : 測地曲率変化ベクトル

(しかし式 () 内は対称な幾何学的曲率変化テンソルであるから恒等的に満足される。従って次の 3 個の方程式が加わって計 5 個となる。

$$\nabla_{\alpha}(c^{\alpha\delta} j^{\beta} \mu_{\delta\beta}) + b_{\alpha}^j (c^{\alpha\beta} \delta_{\beta}) = 0, \quad -\nabla_{\alpha}(c^{\alpha\beta} \delta_{\beta}) + b_{\alpha\delta} (c^{\alpha\delta} c^{\delta\beta} \mu_{\beta\gamma}) = 0$$

次に釣合方程式は次の様になる。

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha j} - b_{\alpha}^j T^{\alpha n} + g^j = 0$$

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha n} + b_{\alpha\delta} T^{\alpha\delta} + g_n = 0$$

$$\nabla_{\delta} M^{\delta j} - T^{jn} = 0$$

更に次の様な複素応力を導入すれば適合条件式と釣合方程式はまとめられる。

$$\tilde{T}^{ij} = T^{ij*} - \sqrt{12} E h c c^{ir} c^{j\beta} \tilde{\mu}_{r\beta}$$

$$\tilde{M}^{ij} = M^{ij*} + \sqrt{12} E h c c^{ir} c^{j\beta} \tilde{\varepsilon}_{r\beta}$$

$$\tilde{T}^{in} = T^{in*} + \sqrt{12} E h c c^{ir} c^{n\beta} \tilde{\delta}_{r\beta}$$

$$c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}$$

又弦肉可展曲面タイプのシエルの場合 Airy の応力関数を用いると $i=1, 2$ 方向の釣合方程式は近似的に満足されるので結局基本方程式としては次の 4 個の方程式だけを考えればよい。

$$\sqrt{12} c \alpha^{\alpha\delta} \nabla_{\delta} \nabla_{\alpha} \tilde{T} + b_{\alpha\delta} \tilde{T}^{\alpha\delta} = -g_n$$

ここで複素変位 $\tilde{w}$ を用いて表せば次の様になる。

$$D \Delta \Delta \tilde{w} - i E h c c^{\alpha\delta} c^{\delta j} \nabla_{\delta} (b_{\alpha\delta} \nabla_j \tilde{w}) = -g_n$$

さてこの方程式はハイフ I, ハイフ II に対して夫々微小パラメーター $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$ を最高階の係数として含む。

$$\varepsilon_I = \sqrt{\frac{c}{r}}, \quad \varepsilon_{II} = \sqrt{\frac{cR}{r^2}}$$

従って解 $\tilde{w}$ は必ず境界層タイプ Γ の解を含む。又 $\tilde{w} \ll 1$ という条件を取り除くと変数係数の偏微分方程式となり変数分離型でないので漸近積分法を用いて近似的に解く。すなわち方程式の中に現れる量をすべて ε の中級数に展開して代入し同次中の係数をすべて0にする様に解 $\tilde{w}$ を定めると次の近似解を得る。

$$\tilde{w} = \tilde{\psi}_0(\varphi) \left\{ 1 + \frac{1}{2A_0} \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sigma_{\alpha}} \lambda'(\varphi) \frac{\beta^2}{\varepsilon} \right\} e^{\lambda(\varphi) \frac{\beta}{\varepsilon}}$$

ただしハーフ Γ Iに対しては

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{r}{R} \frac{\cos\varphi \sin\varphi (1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2\varphi)^{1/2}}{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^4\varphi}, \quad \sigma_{\alpha} = \frac{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2\varphi}{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^4\varphi}$$

ハーフ Γ IIに対しては

$$\sigma_{\alpha\beta} = - \frac{\cos\varphi \sin\varphi (1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2\varphi)^{1/2}}{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^4\varphi}, \quad \sigma_{\alpha} = \frac{\cos^2\varphi}{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^4\varphi}$$

$$\lambda(\varphi) = \pm \sqrt{-i\sigma_{\alpha}} \quad A_0 = \sqrt{\frac{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2\varphi}{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^4\varphi}}$$

しかし $\tilde{w}^{\text{II}}$ の場合 $\varphi = \pi/2$ では上記の解は $\beta \rightarrow \infty$ で0に収束しなくなるので別の解を用いる。

$$\tilde{w} = \exp \left\{ \frac{a}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \beta - \frac{a}{2(1 - \frac{r^2}{R^2})^{1/2}} \frac{\xi^2}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \right\} \times \\ \times \left[\tilde{A}_n \exp \left\{ -\frac{1+i}{\sqrt{2}} a^2 \frac{\xi}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} \right\} + \tilde{B}_n \exp \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}} a^2 \frac{\xi}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} \right\} \right]$$

さて $\tilde{\psi}_0(\varphi)$ の形と $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, a$ を具体的に定めると問題は解けた事になる。これには接合線上のハーフ Γ IとIIの応力ベクトルが連続という条件を用いる。すなわち

$$\tilde{\tilde{Q}}_v^{\text{I}} = -\tilde{\tilde{Q}}_v^{\text{II}} \quad \tilde{\tilde{M}}_{vv}^{\text{I}} = \tilde{\tilde{M}}_{vv}^{\text{II}}$$

ただし

$$\tilde{\tilde{Q}}_v^{\text{I}} = \tilde{\tilde{Q}}_{vv} v + \tilde{\tilde{Q}}_{vt} t + \tilde{\tilde{Q}}_{vn} n$$

これらを空間固定の i, j, k 方向の成分として表せば線型独立な式としては次の4式である。

$$\tilde{\tilde{M}}_{vv}^{\text{I}} = \tilde{\tilde{M}}_{vv}^{\text{II}}, \quad \tilde{\tilde{Q}}_{vt}^{\text{I}} = \tilde{\tilde{Q}}_{vt}^{\text{II}} \\ \tilde{\tilde{Q}}_{vv}^{\text{I}} \frac{\frac{r}{R} \sin^2\varphi}{(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^4\varphi)^{1/2}} + \tilde{\tilde{Q}}_{vn}^{\text{I}} = \tilde{\tilde{Q}}_{vv}^{\text{II}} \frac{1}{(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^4\varphi)^{1/2}} \\ \tilde{\tilde{Q}}_{vv}^{\text{I}} \frac{1}{(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^4\varphi)^{1/2}} = \tilde{\tilde{Q}}_{vv}^{\text{II}} \frac{\frac{r}{R} \sin^2\varphi}{(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^4\varphi)^{1/2}} + \tilde{\tilde{Q}}_{vn}^{\text{II}}$$

これは接合線上の各点での2組のハーフ Γ の満足すべき条件で複重接合条件と呼ぶ事がある。

さてこれまでの理論が満足すべきものであるかどうかを検証する為数値計算を行ない実験値と比較した。実際計算ではパイプを一端軸圧縮した場合について行ない、この場合対称性を考えれば1/4を考察すればよく、この4等分点(端点を含めて5点)で複素接合条件を用いた。この場合問題は複素係数をもつ22元連立方程式の解法に帰着し、東京大学大型計算機センターのHITAC 5020を用いて計算を行なった。以下理論値と実験値を引用しておく。

