

九州大学工学部 正員 山崎徳也

大学院 学生員 石川信隆

1. 序言 連続ばりの弾塑性座屈に関する研究は古く E. Chwalla⁽¹⁾ が偏心圧縮荷重を受ける場合の安定性を報告しており、最近では J. Oxford⁽²⁾ が K. Jezeck⁽³⁾ の単純支持ばりに対する数値解を準用して横荷重と軸荷重を同時に受ける場合の座屈荷重値を求めているが、横荷重と軸荷重との比が一定であるという仮定が含まれている。本論文は前記仮定を排除して一定横荷重のもとに漸増軸荷重が作用する矩形等断面をもつ3径間連続ばりを対象とし、たわみ形を正弦曲線に仮定する近似解法⁽³⁾⁽⁴⁾を採用して計算の簡略化を試み、不静定ばりの弾塑性座屈挙動を解明せんとするものである。なお、本研究では次の仮定を用いる。

(i) 応力-変曲係は図-1のごとく完全弾塑性とする。

(ii) 平面保持の法則にしたがい微小曲率を取り扱う。

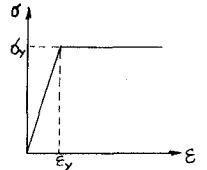


図-1

2. 理論的考察 図-2(a)のごとく中央径間に一定横荷重 Q と漸増軸荷重 N が作用する矩形等断面3径間対称連続ばりを考え、両側の側径間の拘束によって曲げと圧縮を受ける中央径間がいかに安定性を保ちうるかを以下に論ずる。

いま図-2(b)に示すごとく支点 B および B' において切断すれば、中央径間 BB' は Q, N および曲げモーメント M_B 、側径間 AB および $B'A'$ は M_0 のみそれぞれ受ける単純支持ばりに変換でき、ここで単純支持ばりの B および B' 端にそれぞれ作用する未知曲げモーメント M_0 は支点 B および B' におけるたわみ角の連続条件 $\theta_{BC} = \theta_{BA}$ (図-2(c)参照)を満足するゆえ、まず θ_{BC} および θ_{BA} を求めることとなる。

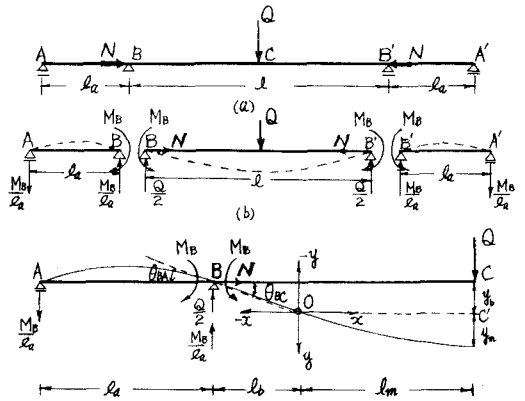


図-2

(1) 中央径間の支点 B におけるたわみ角 θ_{BC} の算定

図-2(b)のごとく中央径間では対称荷重によって対称のたわみ曲線が仮定されるゆえ、図-2(c)のごときたわみ曲線の変曲点すなわち曲げモーメント零点を原点 O として x, y 座標を導入すれば、中央径間任意点の曲げモーメント M は次式で表わされる。

$$M = Ny + \frac{Q}{2}x \quad \dots \quad (1) \quad \text{ただし } N = b h \sigma_0, \sigma_0: \text{軸応力}, b, h: \text{断面の幅および高さ}$$

一方たわみ y は正弦曲数を用うれば次のごとく示される。

$$y = y_m \sin \frac{\pi}{2l_m} x \quad \dots \quad (2) \quad \text{ただし } \begin{cases} y_m: OC \text{ を基線とした } C \text{ 点のたわみ} \\ l_m: \text{曲げモーメント零点間の半スパン長} \end{cases}$$

(a) 限界軸応力の算定

一般に横荷重が作用している場合は中央 C の応力が支点 B のそれよりも降伏状態に早く達するゆえ、 C 点の応力状態に基づいて限界軸応力が決定されることとなる。まず式(2)より C 点の曲率 ϕ を求めれば次式がえられる。

$$\phi = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=l_m} = - \left(\frac{\pi}{2l_m} \right)^2 y_m \quad \dots \quad (3)$$

よって C 点における弾塑性応力分布 (図-3参照) から算出した曲率と式(3)とを等置すれば、たわみ y_m と軸応力 σ_0 との関係式がえられる。 C 点の応力が弾性状態 (図-3(a)) にある場合は σ_0 に関する単調増加関数となり、 ϕ が

状態における限界軸応力は存在しないことが分るので、次に図-3(b)および(c)の第1および第2弾塑性状態となる場合の限界軸応力を求めることとなる。

(i) C翼の応力が第1弾塑性となる場合

図-3(b)の応力分布を用いて内力と外力の釣合より

$$N = \int_A \sigma dA, \quad M = \int_A \sigma y dA, \quad \phi = \frac{\sigma_y}{E d} \quad \dots (4)$$

上式を演算のうえC翼の曲率 ϕ_c を求めれば次式がえられる。

$$\phi_c = - \frac{8(\sigma_y - \sigma_0)^3}{9 E h [(\sigma_y - \sigma_0) - 2 M c / b h^2]^2} \quad \dots (5) \quad \text{ただし } M_c = (M)_{y=y_m} = b h \sigma_0 y_m + \frac{Q}{2} l_m$$

式(3)と式(5)とを等置すれば、 y_m と σ_c との関係が図-4のごとくえられ、これに $d\sigma_c/dy_m = 0$ を適用して y_m および限界軸応力 $\sigma_c = \max. \sigma_0$ と曲げモーメント零位置の細長比 $\lambda_m = 2 l_m / i$ ($i = h / \sqrt{12}$: 断面2次半径)との関係式を次のようにする。

$$y_m = \frac{h}{6 S_c} \left(1 - S_c - \frac{2}{3} \right), \quad \lambda_m^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_y S_c} \left(\frac{1 - S_c - 2/3}{1 - S_c} \right)^3 \quad \dots (6)$$

ただし $S_c = \sigma_c / \sigma_y$, $q = Q / Q_y$,

$Q_y = 8 M_y (3 + 2 l_m / l) / l (3 + 4 l_m / l)$: 横荷重のみによるC翼が降伏するときの荷重

M_y : 純曲げによる降伏曲げモーメント

ここで第1と第2弾塑性との境界条件より限界たわみが $y_E = h \{ (1/S_c - 1)(1 + 2 S_c) - 2/3 \} / 6$ と

求められるゆえ、 y_m は $0 \leq y_m \leq y_E$ に規定され、これより式(6)中の S_c 値が次の範囲となる。

$$S_1 \leq S_c \leq S_2 \quad \text{ただし } S_1, S_2 = (1 \mp \sqrt{1 - 4q/3}) / 2 \quad \dots (7)$$

(ii) C翼の応力が第2弾塑性となる場合 同じく式(4)および図-3(c)を用いてC翼の曲率を求めれば

$$\phi_c = - \frac{\sigma_y}{E h \sqrt{3(1 - \sigma_c/\sigma_y)^2/4 - 3 M c / b h^2 \sigma_y}} \quad \dots (8)$$

式(3)と式(8)とを等置したうえ $d\sigma_c/dy_m = 0$ を適用すれば次式の結果がえられる。

$$y_m = \frac{h}{6 S_c} \left(1 - S_c^2 - \frac{2q}{3} \right), \quad \lambda_m^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_y S_c} \sqrt{(1 - S_c^2 - \frac{2}{3}q)^3} \quad \dots (9)$$

ここで、完全塑性条件より限界たわみは $y_E = h(1 - S_c^2 - 2q/3) / 4 S_c$ とせられ、 $y_E \leq y_m \leq y_H$ となるゆえ

式(9)の S_c は次の範囲となる。 $S_2 \leq S_c \leq S_3 = \sqrt{1 - 2q/3}$

以上の式(6)および式(9)より荷重 Q および細長比 λ_m を与えて限界軸応力 σ_c と直接算定することはかなりの困難を伴うゆえ、逆に Q および σ_c を与えて λ_m を算出する手法を採用する。

(b) たわみ角 θ_{BC} の算定

まず支変Bの曲げモーメント M_B 、たわみ角 θ_{BC} および曲率 ϕ_B は式(1)および式(2)よりそれぞれ次のごとく表わされる。

$$M_B = - (M)_{x=l_b} = b h \sigma_0 y_b + \frac{Q}{2} l_b = b h \sigma_0 y_m \sin\left(\frac{\pi l_b}{2 l_m}\right) + \frac{Q}{2} l_b \quad \dots (10)$$

ただし $y_b = -(y)_{x=l_b} = y_m \sin\left(\frac{\pi l_b}{2 l_m}\right)$, $l_b = l - l_m$: 原長Oより支変Bまでの距離

$$\theta_{BC} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l_b} = \frac{\pi}{2 l_m} y_m \cos\left(\frac{\pi l_b}{2 l_m}\right), \quad \phi_B = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=l_b} = \left(\frac{\pi l_b}{2 l_m} \right) y_m \sin\left(\frac{\pi l_b}{2 l_m}\right) \quad \dots (11)$$

次に2.(1).(a)でえた y_m , $\lambda_m (= 2 l_m / i)$ の各値を式(10)に代入すれば M_B 値がえられ、その大きさより支変Bの応力状態を図-3(a), (b), (c)のいずれかに判別決定し、このときのたわみ角 θ_{BC} を式(11)を用い次の3つの場合についてそれぞれ求める。

(i) B翼の応力が弾性となる場合 ($0 \leq M_B < M_I$, ただし $M_B = M_B / M_y$, $M_I = 1 - S_c$: 弾性限界曲げモーメント)

B翼の断面における弾性応力分布(図-3(a))より算出した曲率 $\phi_B = M_B / EI$ と式(11)の ϕ_B とを等置すれば次式がえられる。

$$\frac{M_B}{M_y} = m_B = \left(\frac{E}{\sigma_y} \right) \left(\frac{h}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2 l_m} \right)^2 y_m \sin\left(\frac{\pi l_b}{2 l_m}\right) \quad \dots (12)$$

式(11)および式(12)より l_b を消去して θ_{BC} を求めれば次式をうる。

$$\theta_{BC} = \frac{\pi}{2 l_m} y_m \sqrt{1 - A^2} \quad \dots (13) \quad \text{ただし } A = \frac{M_B}{\left(\frac{E}{\sigma_y} \right) \cdot \left(\frac{h}{2} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2 l_m} \right)^2 y_m}$$

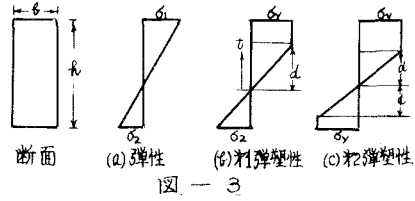


図-3

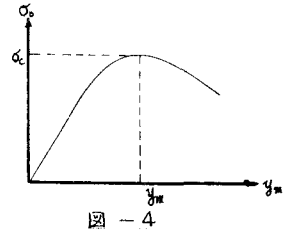


図-4

(ii) B 夾の応力が第 1 弾塑性性となる場合 ($m_i \leq m_B < m_{II}$, $m_{II} = (1+2S_c)(1-S_c)$): 第 1 と第 2 弾塑性性との境界曲げモーメント
同様に図-3(b)より算出した曲率 ϕ_b は式(5)の M_c を M_B に置換したものと一致し、これと式(11)の ϕ_b とを等置すれば M_B が l_b の関数として次のごとく表示される。

$$\frac{8(1-S_c)^3}{q(E/G_y)h(1-S_c-m_B/3)^2} = \left(\frac{\pi}{2l_m}\right)^2 y_m \sin\left(\frac{\pi l_b}{2l_m}\right) \quad \dots (14)$$

式(14)より l_b を求め、式(11)の第 1 式に代入すれば θ_{BC} が次式にて求められる。

$$\theta_{BC} = \frac{\pi}{2l_m} y_m \sqrt{1-B^2} \quad \dots (15) \quad \text{ただし } B = \frac{8(1-S_c)^3}{q(E/G_y)h(\pi/2l_m)^2 y_m (1-S_c-m_B/3)^2}$$

(iii) B 夾の応力が第 2 弾塑性性となる場合 ($m_{II} \leq m_B < m_{III}$, $m_{III} = 1.5(1-S_c^2)$): 塑性性曲げモーメント

上記(i), (ii)の場合と同じく結果のみ記せば次式をうる。

$$\theta_{BC} = \frac{\pi}{2l_m} y_m \sqrt{1-C^2} \quad \dots (16) \quad \text{ただし } C = \frac{G_y}{Eh(\pi/2l_m)^2 y_m \sqrt{3(1-S_c^2)/4-m_B/2}}$$

ここに式(13), (15), (16)の θ_{BC} はいずれも M_B の関数で示されることとなり、これら式中の l_m および y_m の値は B 夾の応力が C 夾のそれよりも常に降伏が遅くなることを考慮して表-1 に示す使用区分にしたがって用いることとなる。

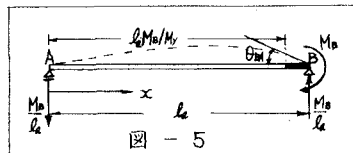
C 夾の応力状態		B 夾の応力状態
第 1 弾塑性性: 式(6)	→	弾 性: 式(3)
		第 1 弾塑性性: 式(5)
第 2 弾塑性性: 式(8)		第 2 弾塑性性: 式(6)

表-1 l_m および y_m の使用区分

(2) 側径間の支え B におけるたわみ角 θ_{BA} の算定

側径間 AB には図-5 のごとく軸荷重が作用していないゆえ、曲げモーメントのみを考慮した弾性および弾塑性性の応力状態を考えればよく、曲率 ϕ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{弾性: } \phi = \frac{M}{EI} \\ \text{弾塑性性: } \phi = \frac{M_y}{EI} \frac{1}{\sqrt{3-2M/M_y}} \end{array} \right\} (17) \quad \text{ただし } M = \frac{M_0 x}{l_e}$$



よって B 夾のたわみ角 θ_{BA} は $\theta_{BA} = \frac{1}{l_e} \int_0^{l_e} \phi x dx$ で表わされるゆえ、これに式(17)を代入して B 夾の応力状態に応じて求めれば次のごとくなる。

(a) B 夾の応力が弾性的の場合 ($0 \leq m_B < 1$)

$$\theta_{BA} = \frac{1}{l_e} \int_0^{l_e} \frac{M}{EI} x dx = \frac{M_B l_e}{3EI} = \frac{l_e}{i} m_B \frac{G_y}{EI 27} \quad \dots (18)$$

(b) B 夾の応力が弾塑性性的の場合 ($1 \leq m_B < 1.5$)

$$\theta_{BA} = \frac{1}{l_e} \int_0^{l_e/m_B} \frac{M}{EI} x dx + \frac{1}{l_e} \int_{l_e/m_B}^{l_e} \frac{M_y}{EI} \frac{x dx}{\sqrt{3-2M/M_y}} = \frac{l_e}{i} \frac{G_y}{EI 27} \frac{1}{m_B} \left[\frac{5}{m_B} - \left(1 + \frac{3}{m_B}\right) \sqrt{3-2m_B} \right] \quad \dots (19)$$

3. 解法

2. (1) および (2) で導いた $\theta_{BC}-M_B$ および $\theta_{BA}-M_B$ 曲線を同一軸上に示せば図-6 のごとくなり、両曲線の交差は 2. で述べたたわみ角の連続条件を満足し、これが M_B の決定条件式となる。

$$\text{すなわち, } \theta_{BC} = \theta_{BA} \quad \dots (20)$$

しかるに θ_{BC} 曲線は 横荷重 Q , 軸応力 σ および 中央径間の細長比 $\lambda (=2l/i)$ の値に対し, $\lambda/2 \leq \lambda_m \leq \max. \lambda_m$ の範囲で図-6 のごとく上に凸となる。

一方 θ_{BA} 曲線は 側径間の細長比 (l_e/i) の値によって 3 本の曲線 (1), (2), (3) に分類される。

θ_{BA} 曲線 (1) は θ_{BC} 曲線と A および B 点で交わるが, A, B 両点において θ_B を僅かに増加 ($\delta\theta_B$) させると, θ_{BC} 曲

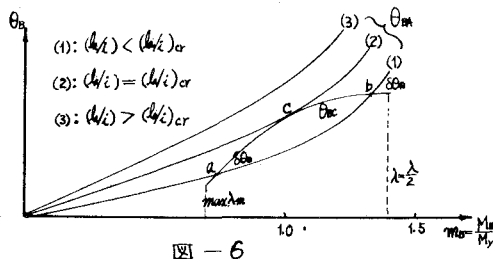


図-6

線の釣合の持続に必要な M_B 値が、 θ_{BA} 曲線に沿って点 a では増大、点 b では減少するゆえ、 a, b 両方はそれぞれ図-7(a)の実線および実線に示すごとく安定および不安定な釣合状態を与えることとなり、限界条件を示すものではない。

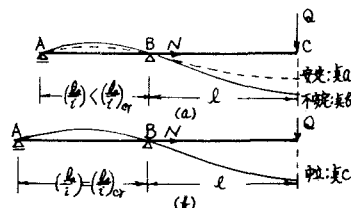


図-7

次に θ_{BA} 曲線(2)は θ_{BC} 曲線と点 C で接し、釣合位置を僅かに変化させても M_B は殆んど変わらず、中央径間の釣合を保つに必要な拘束曲げモーメントが作用しており、このとき点 C は図-7(b)のごとく中立な釣合状態を与え、これが限界条件を形成し次式を成立させる。

$$\frac{d\theta_{BC}}{dM_B} = \frac{d\theta_{BA}}{dM_B} \quad \dots \quad (21)$$

また θ_{BA} 曲線(3)は θ_{BC} 曲線と交わる可能性は全くなく式(20)を満足せず考察の対象とはならない。

したがって式(20)と式(21)を同時に満足するごとく曲げモーメント M_B および側径間の限界細長比 $(l_a/i)_{cr}$ を決定せねばならず、まず式(13), (15), (16)および式(18), (19)を併用のうえ式(20)および式(21)より (l_a/i) を消去して M_B のみの関数とし、これにNewton法を適用して逐次近似により M_B を求め、これを式(20)または式(21)に含まれる m_a に代入すれば (l_a/i) が求まり、これが $(l_a/i)_{cr}$ を与えることとなる。

4. 数値計算例

SS41($\sigma_y = 3.2 \text{ t/cm}^2$)の鋼材に対し横荷重 $Q = 0.3Q_y$ および中央径間の細長比 $\lambda = 150$ のとき、限界軸心力 $\sigma_c = 0.4\sigma_y$ を与えれば式(6)より $y_m = 0.2083h$ 、 $\lambda_m = 96.80$ がえられ、これを用いて式(13), (15)および式(18), (19)を併用のうえ式(20)および式(21)より M_B を求めれば $M_B = 0.6689M_y$ の収斂値をえ、これより側径間の限界細長比が $(l_a/i)_{cr} = 82.61$ と算出される。

5. 結語

厳密解法⁽²⁾のごとく弾塑性境界におけるたわみとたわみ角との連続条件より逐次積分定数を決定する複雑さに比べ、本法ではたわみ形を仮定することにより演算が遙かに簡易化された。また横荷重 Q を一定とし、中央径間の細長比 λ と側径間の細長比 (l_a/i) との関係を限界軸心力 σ_c をパラメータとして図表化しておけば、本題の連続はりとは勿論のこと図-8に示すごとくラーメンなどの座圧荷重値の算定にも役立ち実用効果も大きいといえる。本研究は文部省科学研究費の補助を受けた、附記して謝意を表す。

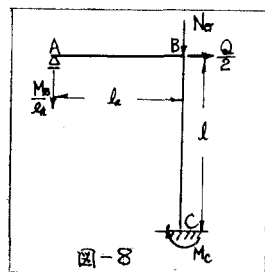


図-8

(参考文献)

- (1) E. Chwalla: Ausermittigt gedrückte Baustahlstäbe mit elastisch eingespannten Enden und verschieden großen Angriffshebeln, Der Stahlbau, vol.10, 1937
- (2) J. Oxfort: Über die Begrenzung der Traglast eines statisch unbestimmten biegesteifen Stabwerkes aus Baustahl durch das Instabilwerden des Gleichgewichtes, Der Stahlbau, vol.30, 1961
- (3) K. Jezeck: Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl, Julius Springer Verlag Wien, 1937
K. Jezeck: Näherungsberechnung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stahlstäbe, Der Stahlbau, vol.8, 1935
- (4) 山崎・遠水: 横荷重を受ける部材に対する近似解法, 第21回年次学術講演会講演摘要, 昭和44年5月