

三菱重工業 K.K.

藤野 勉

三菱重工業 K.K. 正員 大坂 豊司

骨組または薄板の組合せとして表わされる任意の構造物の弾性挫屈解析法の提案である。

任意の構造物とは、たとえば図-1に示すような立体構造物が、適当にいくつかの節点(図では黒丸で示す)を持ち、この節点間には梁または薄板を介して互に力が作用し合うと考えられるものをいう。図-1の節点間を結ぶ線は、梁と考えるもよく、また三角形板の折れ目と考えるもよい。とにかく節点間は弾性的要素により結合されていると仮定する。

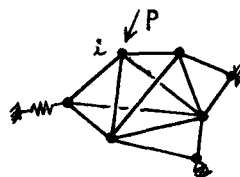


図-1

いま平衡状態にある構造物の節点 i の平衡方程式は

$$\sum_k T_{ik} \cdot \bar{f}_{ik} = \bar{P}_i \quad (1)$$

と書ける。ここには k なる弾性要素が i 節点に結合されているとして、 T_{ik} は k 要素について定められた座標と構造全体に共通して定められた基本座標との i 点に関する座標回転関係を表わす matrix である。 $\bar{f}$ は k 要素のもつ i 点の座標軸方向の力 $\vec{f}$ の vector である。 $\bar{P}_i$ は i 点に作用する外力 vector である。また $\sum_k$ とは i 点に作用する要素の全 k について sum up することである。

ところで平衡状態にある構造物に微小な付加変位を与えた場合に別の平衡状態が存在するとすれば (1) 式は高次の微小項を省略して

$$\sum_k T_{ik} \cdot \bar{f}_{ik} + \sum_j \sum_k T_{ik} \frac{\partial \bar{f}_{ik}}{\partial x_j} u_j + \sum_j \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_j} \bar{f}_{ik} u_j = \bar{P}_i \quad (2)$$

と表わせる。ここに j は、 i 点を含めて、 k 要素に関する全ての節点を意味する。 x_j は節点の座標または u_j は j 点の付加変位である。 x_j および u_j は、 i 点の座標および変位を便宜上まとめて一般的に表わしている。

(2) 式は (1) 式を代入して

$$\sum_j \sum_k T_{ik} \frac{\partial \bar{f}_{ik}}{\partial x_j} u_j + \sum_j \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_j} \bar{f}_{ik} u_j = 0 \quad (3)$$

となる。(3) 式は変位 u に関する線形の式であるから各節点について (3) 式と同様に平衡方程式を求めれば構造全体として

$$K \cdot \bar{u} - Q \cdot \bar{u} = 0 \quad (4)$$

なる線形連立方程式が成り立つ。

(3) 式の第 1 項すなわち K は結局、構造全体を表わす剛性 matrix に外ならないから、普通の静的な

平衡方程式の係数matrixと同じである。つぎにオ2項に含まれる子が外力 $\bar{P}$ に比例すると仮定すれば単位外力に対する G^* を G とおいて P なる大きさの外力に対して(4)式はつぎのように書ける。

$$F \cdot \bar{U} - P G \cdot \bar{U} = 0 \quad (5)$$

この(5)式は特定の値 P に対して意味のある $\bar{U}$ を解にもつが、その中で最小の P つまり最小の極底荷重を求めることが問題になる。

そこで(5)式の特性について検討を行う。各節点の平衡方程式すなわち(1)式を構造全体についてまとめると

$$F \bar{U} = \bar{P} \quad (6)$$

とMatrix表示される。(6)式はまた

$$F^{-1} \bar{P} = \bar{U} \quad (7)$$

とも表わせる。ここで F^{-1} の (i, j) 要素 f_{ij}^{-1} は j 点に単位力 P_j が作用したときの i 点の変位量を表わしている。したがって、Maxwell-Betti⁽¹⁾の相反定理なら

$$f_{ij}^{-1} P_i = f_{ji}^{-1} P_j \quad (8)$$

が成り立つことを考慮すれば、 $f_{ij}^{-1} = f_{ji}^{-1}$ すなわち F^{-1} は対称Matrixである。また

$$F = E \cdot F = (F^{-1} F)^T F = F^{-T} (F^{-1})^T F = F^{-T} F^{-1} F = F^{-T} E = F^{-T} \quad (9)$$

から F も対称Matrixである。

この結果から、相反定理の系として、任意の境界条件をもつ一般弾性構造物の剛性Matrixは必ず対称になることが証明された。このように任意の剛性Matrixに一般的証明を与えておくことは、物理的な意味づけだけでなく、数値計算法の上からも極めて重要である。たとえば任意の構造に適用できるProgramに必要なMatrix Elementの量は約半分減り、それに伴う演算処理も非常に少くなる。

つぎに $P_{E_i} \neq P_{E_j}$ として、 P_{E_i}, P_{E_j} に対する $\bar{U}$ を $\bar{U}_i, \bar{U}_j$ とすると $\bar{U}_i, \bar{U}_j$ には次の関係がある。 P_{E_i} に対する(5)式の左から $\bar{U}_j^T$ を乗じ

$$\bar{U}_j^T \cdot F \bar{U}_i - P_{E_i} \bar{U}_j^T G \bar{U}_i = P_{E_j} \bar{U}_j^T G \bar{U}_i - P_{E_i} \bar{U}_j^T G \bar{U}_i = (P_{E_i} - P_{E_j}) \bar{U}_j^T G \bar{U}_i = 0 \quad (10)$$

したがって

$$\bar{U}_j^T G \bar{U}_i = 0 \quad (11)$$

線形化した極底方程式は他の方法によっても求められると思うが、いずれにしても(5)式のとる。(5)式を満足する最小極底荷重 P_E を求めるには、従来の方法では、行列式や逆行列を利用してきいたものであるがこれにしても一般的に多節点構造に適用するには不都合が多く実用的でない。2の点次のよ

うな筆名の提案する方法は非常にすぐれている。

すなわち適当に決めた $\bar{u}^{(0)}$ を用いて、次の連立方程式の右辺を常数とすることからできる。

$$F \cdot \bar{u} = G \cdot \bar{u}^{(0)} \quad (12)$$

これを解いて改良された $\bar{u}$ を左辺に求める。この方法の利点は逆行列を必要としないので極めて演算速度を速くすることからできる。また応力⁽²⁾、固有振動⁽³⁾、控屈荷重の計算がほとんど同じ Process で行えるので Programming の能率が非常によく集まる。また P_E や Mode の予測を必要とせず自動的に収束する。収束性は構造の特性によるので一概にいえないが立体で 100 節点を越えても十分実用になる。言い換えれば小型の電子計算機でもかなりの多節点構造の解析ができるということになる。

収束性は次のようにして証明できる。任意の仮定した Vector $\bar{u}^{(0)}$ を

$$\bar{u}^{(0)} = \sum \alpha_i \bar{u}_i \quad (13)$$

で表わせるとする。こゝに $\bar{u}_i$ は i 次の控屈荷重 P_{E_i} に対応させてある。(12) 式を解いたとすると

$$\bar{u} = F^{-1} G \bar{u}^{(0)} \quad (14)$$

と表わせると、(14) 式の左辺を次の初期値として連立方程式を反復して解いて得られる Vector を $\bar{u}^{(k)}$ とすれば

$$\bar{u}^{(k)} = (F^{-1} G)^k \bar{u}^{(0)} = \sum_{i=1} \alpha_i \left(\frac{1}{P_{E_i}} \right)^k \bar{u}_i \quad (15)$$

となる。 $|P_{E_1}| < |P_{E_2}| < \dots$ とすれば(15)式の右辺を変形して

$$\bar{u}^{(k)} = \left(\frac{1}{P_{E_1}} \right)^k \left(\alpha_1 \bar{u}_1 + \sum_{i=2} \alpha_i \left(\frac{P_{E_1}}{P_{E_i}} \right)^k \bar{u}_i \right) \quad (16)$$

と表わせると

$$\bar{u}^{(k)} \longrightarrow \alpha_1 \left(\frac{1}{P_{E_1}} \right)^k \bar{u}_1, \quad k \longrightarrow \infty \quad (17)$$

すなわち最小控屈荷重は

$$P_{E_1} = \frac{\bar{u}^{(k-1)}}{\bar{u}^{(k)}} \quad k \longrightarrow \infty \quad (18)$$

から得られる。控屈形は $\bar{u}^{(k)}$ である。

構造物によっては 1 次控屈荷重と 2 次控屈荷重が近接しているなど 2 次以上の高次控屈荷重を知る必要が生じる場合がある。 P_{E_2} を求めるには、(11) 式の結果を用いて

$$\bar{u}_1^T G \bar{u}^{(0)} = \bar{u}_1^T G \sum_{i=1} \alpha_i \bar{u}_i = \alpha_1 \bar{u}_1^T G \bar{u}_1 \quad (19)$$

となる。これから

$$\alpha_1 = \frac{\bar{u}_1^T G \bar{u}^{(0)}}{\bar{u}_1^T G \bar{u}_1} \quad (20)$$

が得られるので、初めの仮定 Vector $\bar{U}^{(0)}$ を $\bar{U}$, 成分を除いた $\bar{U} - \alpha_1 \bar{U}_1$ に置き換えることによって P_{E2} を自動的に求める。

本法は振動解析の際に連続系を集中 Mass 系に置き換えるのと同様な線形化を行、ていうので、構造をある程度多節点化する必要がある。そこで分割数による近似度を検討するため、等断面梁を用いて Euler 控屈値との誤差を比較してみると図-2 のようになる。また支間を10等分割して節点間を直線で結んだアーチの等分布荷重による計算結果が図-3 であるが理論値との誤差は大きい方で千%であった。この結果から一般の構造の弾性控屈荷重の推定に本法を十分利用できると思われる。

本法は単純な骨組または板構造では多節点化が必要であるが反面、変断面、非対称荷重に自由に適用できる。また複雑な構造は必然的に多節点になるため特に節点を設ける必要はない。たとえば図-4, 5 などで、図-4 は Rahmen と Truss 柱の全体控屈と比較したもので、図-5 は等分布荷重による Rokee 橋の面内控屈である。その他局部控屈の解析にも利用できる。

以上は面内の控屈についてのみであり、板に立体に拡張した場合にはさらに利用範囲は広い。基本的な一例として腹板の控屈解析があるが、現在までの計算結果ではかなりよい結果が得られそうである。さらに、本法の拡張として控屈以前に部分的な塑性性や生ずる場合の考慮など考え方としては比較的簡単に導入できるのでこの方面での応用も考えられる。

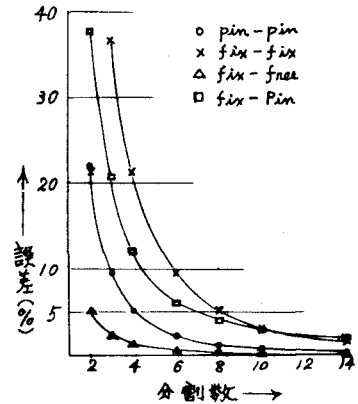


図-2

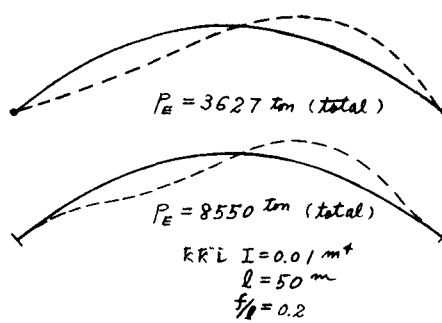


図-3

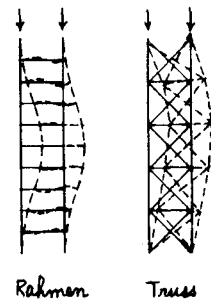


図-4



図-5

参考文献

- (1) 倉西 応用弾性学 機械学会
- (2) 藤野, 大坂 電子計算機による平面構造の応力解析
三菱重工技報 MTB 010029 1965
- (3) 大坂 任意格子構造の固有振動解析について
東大工学部機械科 渡辺研究室
MCB研究会講演資料 1966
- (4) 平井 鋼橋Ⅲ 技報堂
- (5) 大坂, 井上, 熊野, 江草 ニルベン形橋梁の控屈に関する研究
三菱重工技報(長大橋特集号) Vol.3, No.6 1966