

大阪市立大学 工学部 正員 倉田 宗章

大阪市立大学 工学部 〇正員 園田 恵一郎

まえがき 第21回土木学会学術講演会において、我々は、はり付き床板の上界崩壊荷重の一般的な計算方法について発表した。今回は、板は Tresca の降伏条件式にしたがう等方性等質なる剛塑性材料から構成されているものとし、無限に長い幅を有する相対する2辺が単純に支持された等厚板に、はりが1本付いた構造を取り上げ、はり中央に集中荷重を受ける場合の崩壊荷重の算定式を極限解析法の下界定理にしたがって誘導し、若干の数値計算により、上界解との比較を行なった。

1 解析方法(下界解)

A 板の曲げ剛性を無視した場合の計算

板の曲げ剛性を無視すれば、板には曲げモーメントは起こらず、Membrane Forces のみが作用することになり、一種の平面応力問題として取り扱うことが出来る。今、図-1に示すように座標系を取り、板面内に作用する主応力を σ_1, σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$) によって表示し、無次元化した主応力 $n = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, s = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}$ (σ_0 : 1軸引張り圧縮降伏応力) と応力変数 $\omega = n + s, \chi = n - s$ を導入すれば、Tresca の降伏条件式は $\max(|n|, |s|, |x|) = 1$ となり、静的許容応力場を作るためには $\max(|n|, |s|, |x|) \leq 1$ ———— (1) の条件不等式を満足しなければならない。次に、図-1の板を x, y 座標の第一象限によって切り取れば、一般に、板の切断面 ($x=0, y=0$) において、図-2に示すような未知応力分布が存在する。

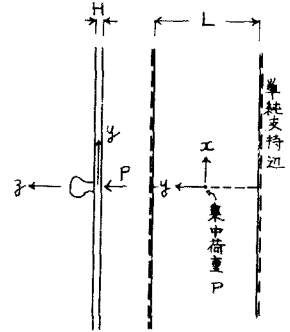


図-1

一方、このはり付き板を一つのT形ばりと思えば、荷重Pによって誘起される全フランジ力、Tは

$$T = 2H \int_0^{\frac{L}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} dy = 2H \int_0^{\infty} (\sigma_y)_{y=0} dx \quad \text{————— (2)}$$

こにおいて、H: 板厚、L: スパン長さ

それゆえに、崩壊荷重Pを最大にするには、T形ばりの全塑性モーメントを最大に、すなわち、板全面において、条件式(1)を満足させながら、全フランジ力、Tを最大にすればよいことになる。

次に、崩壊直前における簡単な静的許容応力場を図-2に示した未知応力分布から推察すれば、板内において、図-3に示す不連続応力場を作ることが出来る。すなわち、この図にお

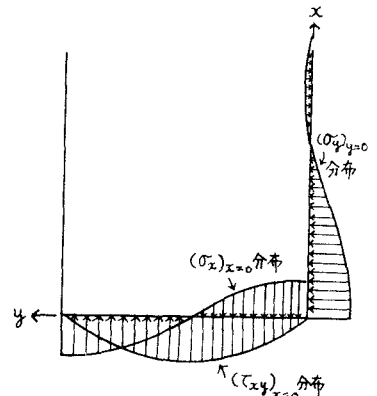


図-2

いて、①～⑤は Constant stress field を表わし、それらの接線線は応力不連続線となっている。

なお、番号の付けていない領域は無応力領域を示している。いま、 i 番目の領域の応力を $\omega_i, \chi_i, n_i, s_i, \theta_i$ (x 軸と最大主応力面方向となす正(反時計回り)の角度) によって表示すれば、 i

番目と $i+1$ 番目の領域の接続線である応力不連続線における応力平衡条件式は次のようになる。

$$\omega_i + \chi_i \cos 2(\theta_i - \alpha_i) = \omega_{i+1} + \chi_{i+1} \cos 2(\theta_{i+1} - \alpha_i), \quad \chi_i \sin 2(\theta_i - \alpha_i) = \chi_{i+1} \sin 2(\theta_{i+1} - \alpha_i)$$

こにおいて、 α_i は不連続線と x 軸とのなす角を表わす。

したがって、1~2線、2~3線における境界条件と3~5線における応力平衡条件により、

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad S_1 = -p_1, \quad \theta_4 = \frac{\pi}{2} - 2\beta_1, \quad S_4 = 0, \quad \theta_5 = 0, \quad p_5 = p_2$$

そして、不連続線 1~6, 2~6, 3~6, 4~6, 5~6 線における応力平衡条件式により次の関係式を得る。

$$\pi_1 - p_1 - (\pi_1 + p_1) \cos 2\beta_2 = \omega_2 + \chi_2 \cos 2(\theta_2 - \beta_2) \quad (3)$$

$$\omega_2 + \chi_2 \cos 2(\theta_2 - \alpha) = \omega_3 + \chi_3 \cos 2(\theta_2 - \alpha) \quad (4)$$

$$\omega_3 + \chi_3 \cos 2(\theta_3 - \phi) = \pi_4 - n_4 \cos 2(2\beta_1 + \phi) \quad (5)$$

$$\pi_4 - n_4 \cos 2\beta_1 = p_2 + S_5 + (p_2 - S_5) \cos 2\beta_1 \quad (6)$$

$$(\pi_1 + p_1) \sin 2\beta_2 = \chi_2 \sin 2(\theta_2 - \beta_2) \quad (7)$$

$$\chi_2 \sin 2(\theta_2 - \alpha) = \chi_3 \sin 2(\theta_3 - \alpha) \quad (8)$$

$$\chi_3 \sin 2(\theta_3 - \phi) = n_4 \sin 2(2\beta_1 + \phi) \quad (9)$$

$$n_4 = p_2 - S_5 \quad (10) \quad \text{そして、(6)式と(10)式により、} \quad p_2 = n_4(1 - \cos 2\beta_1) \quad (11)$$

を得る。したがって、 $0^\circ < \beta_1 < 45^\circ$, $90^\circ < \phi < 180^\circ - 2\beta_1$, $\phi < \alpha < 180^\circ + \beta_2$, $0^\circ < \beta_2 < 90^\circ$ の範囲内の任意の $\beta_1, \beta_2, \phi, \alpha$ の値を上式に代入し、 $\pi_i, S_i, \omega_i, \chi_i, \theta_i$ について解き、条件式(1)を満足させながら、 $T = H(p_1 x - p_2 y \cot \beta_1) = \frac{(p_1 \cot \beta_2 - p_2 \cot \beta_1)}{2(1 - \tan \phi \cot \beta_2)} HL$ (12)

の最大値を求めることが我々の問題となる。そのためには、(3)~(9)式を若干単純化することが出来る。すなわち、(12)式中の $p_2 \cot \beta_1 = n_4(1 - \cos 2\beta_1) \cot \beta_1 = n_4 \sin 2\beta_1$ したがって、 $n_4 > 0$

であるから、 $\beta_1 \rightarrow 0$ (13) の時、 T は最大になることが予想出来、また、(2)式の関係から、 T を大きくするには領域②において、 $(\tau_{xy})_{x=0}$ を最大にしなければならず、そのためには、条件式(1)を考慮に入れると、 $\chi_2 = \chi_3 = 1$ (14) とならねばならないことも容易に推察出来る。

したがって、(13)、(14)式の関係を(3)~(9)式に代入すれば、上述の4自由度の問題は2自由度の問題になり、 $\tan \alpha = -\frac{y_2 - y_1}{x}$, $\tan \phi = -\frac{\frac{x}{2} - y_1}{x}$, $\tan \beta_2 = \frac{y_1}{x}$ なる関係を用い、無次元量 $\mu = \frac{2x}{L}$

$\lambda_2 = \frac{2y_2}{L}$ を導入すれば、(3)~(10)式は次のように単純化される。

$$\omega_3 = -\frac{\mu^2 - 0.25}{0.25 + \mu^2} \cos 2\theta_3 + \frac{\mu}{0.25 + \mu^2} \sin 2\theta_3 + \frac{0.5}{0.25 + \mu^2} n_4 \quad (15)$$

$$\sin 2\theta_3 = \frac{1}{(\mu - \frac{1}{4\mu})^2} \left\{ \left(\frac{1}{4\mu} - \mu \right) n_4 \pm \sqrt{\left(\mu - \frac{1}{4\mu} \right)^2 + 1 - n_4^2} \right\} \quad (16)$$

$$\cos 2\theta_3 = -\left(\mu - \frac{1}{4\mu} \right) \sin 2\theta_3 - n_4 \quad (17)$$

$$\omega_2 = \omega_3 - \frac{\mu^2 - (\lambda_2 - 0.5)^2}{(\lambda_2 - 0.5)^2 + \mu^2} (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_3) + \frac{2\mu(\lambda_2 - 0.5)}{(\lambda_2 - 0.5)^2 + \mu^2} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_3) \quad (18)$$

$$\sin 2\theta_2 = \frac{1}{1 + \left\{ \frac{2\mu(\lambda_2 - 0.5)}{\mu^2 - (\lambda_2 - 0.5)^2} \right\}^2} \left\{ \sin 2\theta_3 + \frac{2\mu(\lambda_2 - 0.5)}{\mu^2 - (\lambda_2 - 0.5)^2} \cos 2\theta_3 \right\} \pm \left\{ \frac{2\mu(\lambda_2 - 0.5)}{\mu^2 - (\lambda_2 - 0.5)^2} \right\} \sqrt{1 + \left\{ \frac{2\mu(\lambda_2 - 0.5)}{\mu^2 - (\lambda_2 - 0.5)^2} \right\}^2} \quad (19)$$

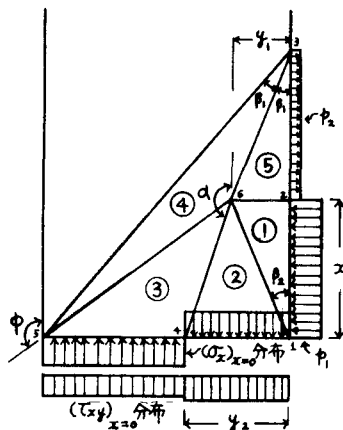
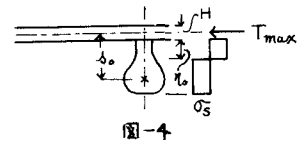


図 - 3

$$\cos 2\theta_3 = \frac{\mu^2 - (\lambda_2 - 0.5)^2}{2\mu(\lambda_2 - 0.5)} (\sin 2\theta_3 - \sin 2\theta_2) + \cos 2\theta_3 \quad (20)$$

$$n_4 = -n_1 = -\frac{\omega_2}{2} + \frac{\cos 2\theta_2}{2} - \mu \sin 2\theta_2 \quad (21)$$

$$p_1 = -\frac{\omega_2}{2} - \frac{\cos 2\theta_2}{2} - \frac{1}{4\mu} \sin 2\theta_2 \quad (22)$$



したがって、 $0 < \mu < \infty$, $0 \leq \lambda_2 \leq 1$ の任意の μ , λ_2 の値を(15)

へ(22)式に代入し、 ω_2 , ω_3 , n_4 , p_1 を trial and error method により求め、条件式(1)を満足する範囲内で、 T の最大値、すなわち、 $(\mu\mu)_{\max}$ の最大値を計算すると、 $(\mu\mu)_{\max} \doteq 0.472$ (23)

を得、その時、 $\mu = 0.72$, $\lambda_2 = 0.62$, $n_1 = -0.655$, $\omega_2 = -0.3107$, $\omega_3 = -0.3633$, $n_4 = 0.655 \sin 2\theta_2 = -0.9371$, $\cos 2\theta_2 = -0.3491$, $\sin 2\theta_3 = -0.9542$, $\cos 2\theta_3 = -0.2993$, $p_1 = 0.655$, $n_5 = p_2 = 0$,

$S_5 = n_1 = -n_4 = -0.655$ を得る。したがって、(23)式により、 $T_{\max} = 2(\mu\mu)_{\max} \frac{HL}{\sigma_s} \doteq 0.472 HL \sigma_s$ (24) となり、この場合の上界解は1~4~5にすべり線が出るものとして計算すれば、

$T_{\text{upper}} = 0.5 HL \sigma_s$ を得るので、(24)式の $T_{\max}$ の値は上界解の約94.4%であることが分かる。

次に、ここで考えているはり付き板のはりは図-4に示すような任意形断面(長さ方向には一様)を持ってゐるものとし、 A : 断面積、 δ_0 : 板の中央面より、はり断面の図心までの距離、 σ_s : はり材料の降伏応力、 $\beta = \frac{\sigma_s}{\sigma_0}$ とすれば、崩壊荷重は、 T 形ばりとしての計算により、

(a), $T_{\max} \geq A \sigma_s$, すなわち、 $A \leq 0.472 \frac{HL}{\beta}$ の場合

$$\text{崩壊荷重 } P = 4\beta H^2 \sigma_0 \frac{\delta_0 A}{H^2 L} \quad (25)$$

(b), $T_{\max} \leq A \sigma_s$, すなわち、 $A \geq 0.472 \frac{HL}{\beta}$ の場合

$$\text{崩壊荷重 } P = 4\beta H^2 \sigma_0 \left\{ \frac{A}{2H^2 L} (\delta_1 - \delta_2) + \frac{0.236}{\beta H} (\delta_1 + \delta_2) \right\} \quad (26)$$

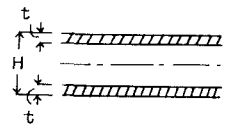


図5. サンドウィッチ板

こにおいて、 δ_1 : 板の中央面より中立軸の下に位置するはり断面の図心までの距離

δ_2 : 板の中央面より中立軸の上に位置するはり断面の図心までの距離

B. 板の曲げ剛性を考慮に入れた場合の計算

板の曲げ剛性を考慮に入れば、板の断面要素には、Membrane Forces の他に、曲げモーメントが同時に作用する複雑な問題となり、一般的な取り扱いは困難となる。しかしながら、ここでは、次に示す仮定を導入し、単純化した解析方法を試みた。仮定(1) 板の厚さ方向のせん断力の降伏条件式に与える影響を無視する。仮定(2) 板とはりを切断した際に、生ずるはり上の上下方向の分布反力の影響は無視される。すなわち、外力は集中荷重点下においてのみはりに伝達される。仮定(3) 板断面を図-5に示すようなサンドウィッチ板と考へ、斜線を施した部分は曲げ応力のみに抵抗し、中央部はMembrane Forces のみに抵抗すると考へる。これらの仮定において、仮定(1) は、薄板の極限解析法には常に用いられるものであり、また、仮定(2) は不静定余剰力の数の減少を意味し、仮定(3) の導入も、応力平衡条件を犯さなから、これらの仮定の導入によって得られた崩壊荷重は下界解であることを保証される。

さて、はり断面は、図-4と同様であるとするれば、 x 軸上に作用する Total Membrane Force は(24)式により、 $T = 0.472 (H - 2t) L \sigma_0$ 。板の全塑性曲げモーメントは、 $M_s = H^2 \sigma_0 \left(\frac{t}{H} \right) \left(1 - \frac{t}{H} \right)$, T 形ばりとしての全塑性モーメントは $M_B = \beta H^3 \sigma_0 \left\{ \frac{A}{2H^2} \left(\frac{\delta_1}{H} - \frac{\delta_2}{H} \right) + \frac{0.236}{\beta} \left(\frac{L}{H} \right) \left(1 - 2 \frac{t}{H} \right) \times \frac{\delta_1}{H} + \frac{\delta_2}{H} \right\}$

一方, W. Schumann, M. Zaid によって, 集中荷重を受ける任意形状の板の崩壊荷重は $2\pi M_0$ (M_0 : 板の単位長さ当りの全塑性曲げモーメント) となることが証明されている。したがって, このことを利用すれば, ここで考えているはり付き板の崩壊荷重 P は

$$P = 2\pi M_0 + \frac{4}{L} M_B = 2H^2\sigma_0 \left\{ \pi t'(1-t') + \rho \frac{A}{HL} (\delta_1' - \delta_2') + 0.472(1-2t')(\delta_1' + \delta_2') \right\} \quad (27)$$

となる。このにおいて, $t' = \frac{t}{H}$, $\delta_1' = \frac{\delta_1}{H}$, $\delta_2' = \frac{\delta_2}{H}$ (δ_1, δ_2 は (25), (26) 式の場合と同じ) それゆえに, $\frac{dP}{dt'} = 0$ によって, P の最大値, すなわち, ここで求めるべき下界の崩壊荷重が決定出来る。

2. 数値計算結果

はり, 高さ D , 幅 $B_0 (= 0.2D)$ なる矩形断面とし, はり材料と板材料は同一であるとして, 計算した結果を図-6, 図-7, 図-8 に示している。これらの図において, 下界解とは, (27) 式によって計算した崩壊荷重の最大値を示しており, 上界解①は, 既に我々が発表した方法⁽¹⁾を, Tresca の降伏条件にしたがう材料に適用して求めたものであり, 上界解②は, H.G. Hopkins, W. Prager⁽⁴⁾によって求められた周辺固定円板の解を利用して求めたものであり, はり断面が極端に小さい場合に適用される。これらの数値計算結果により, ここで誘導した崩壊荷重の計算法は, 実用的には満足出来る値を与えるものと思われる。なお, こゝでの数値計算は, 矩形ばりに限定し, また, はり材料と板材料は同一としたが, そうでない場合でも, 容易に計算出来ることは言うまでもない。

最後に, この研究に対して, 第4回松永記念科学振興財団研究助成金を受けたことを付記します。

引用文献

(1) 倉田, 園田: はり付き床板の極限強度について, 第21回土木学会年次講演会 (1966) (2) W. Schumann: On limit Analysis of Plates: Quart. Appl. Math. 16 (1958) P. 61~71. (3) M. Zaid: On the Carrying Capacity of Plates of Arbitrary Shape and Variable Fixity under a Concentrated Load: J. Appl. Mech. 25 (1958) P. 598~602. (4) H. G. Hopkins, W. Prager: The Load Carrying Capacities of Circular Plates: J. Mech. Phys. Solid 21~13 (1953)

