

九州大学工学部 正員 山崎 徳也

正員 彦坂 照

大学院 学生員 ○葛城幸一郎

1. 緒言

先に著者らは二方向連続等方性矩形板の座屈荷重算定法を提示し、解析結果と併せ報告したが、本研究は、前記手法を直交異方性矩形板より構成される二方向連続矩形板に拡張応用し、かかる連続板が図-1のごとく互いに垂直な二方向から周辺直圧力を受ける場合の安定問題の解法を提示するものである。

2. たわみ角一端モーメント関係式の誘導

図-2のごとく2辺の長さが a , b の直交異方性矩形板が単位巾あたり N_x , N_y なる中立面内の等分布圧縮力を受ける場合のたわみ曲面の微分方程式は次式であらわされる。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

ここに

$$D_x = E_x h^3 / 12(1 - \nu_x \nu_y)$$

$$D_y = E_y h^3 / 12(1 - \nu_x \nu_y)$$

$$H = \nu_x D_y + 2D_{xy}, \quad D_{xy} = G_{xy} h^3 / 12$$

E_x, E_y ; x, y 方向のヤング率

ν_x, ν_y ; x, y 方向のポアソン比 G_{xy} ; セン断弾性係数 h ; 板厚

いま式(1)を満足するたわみ w の一般解が次式で表わされるものとする。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X \sin \frac{n\pi}{a} y + \sum_{m=1}^{\infty} Y \sin \frac{m\pi}{b} x \quad (2)$$

ここに X, Y はそれぞれ x, y のみの函数であり式(2)を式(1)に代入して解けば、 X, Y がそれぞれ次式のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} X &= C_{n1} \cosh \pi \lambda_1 \xi + C_{n2} \sinh \pi \lambda_1 \xi + C_{n3} \cosh \pi \lambda_2 \xi + C_{n4} \sinh \pi \lambda_2 \xi \\ Y &= D_{m1} \cosh \pi \mu_1 \eta + D_{m2} \sinh \pi \mu_1 \eta + D_{m3} \cosh \pi \mu_2 \eta + D_{m4} \sinh \pi \mu_2 \eta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし $C_{n1} \sim C_{n4}, D_{m1} \sim D_{m4}$ は積分定数。

$$\lambda_1 = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{H}{D_x} \left\{ \pi^2 - \frac{R}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right\} \pm \sqrt{\pi^2 - \frac{R}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \frac{D_x D_y}{H^2} n^2 \left(n^2 - \frac{H}{D_y} Q \right)}}$$

$$\mu_1 = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{H}{D_y} \left\{ m^2 - \frac{Q}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\} \pm \sqrt{m^2 - \frac{Q}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 - \frac{D_x D_y}{H^2} m^2 \left(m^2 - \frac{H}{D_x} R \right)}}$$

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad R = N_x a^2 / H \pi^2, \quad Q = N_y b^2 / H \pi^2$$

以上の式(2), (3)より結局、式(1)の一般解は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n1} \cosh \pi \lambda_1 \xi + C_{n2} \sinh \pi \lambda_1 \xi + C_{n3} \cosh \pi \lambda_2 \xi + C_{n4} \sinh \pi \lambda_2 \xi \right) \sin n\pi \eta \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(D_{m1} \cosh \pi \mu_1 \eta + D_{m2} \sinh \pi \mu_1 \eta + D_{m3} \cosh \pi \mu_2 \eta + D_{m4} \sinh \pi \mu_2 \eta \right) \sin m\pi \xi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

いま $x=0, a$ および $y=0, b$ における境界条件を任意として取扱えるごとく正弦フーリエ級数を

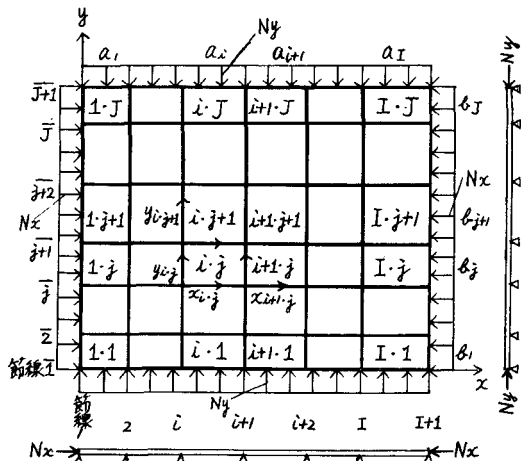


図-1

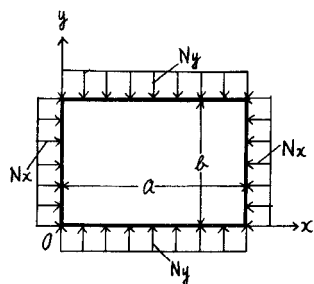


図-2

用いて次式にて一般表示するものとする。

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta A_n \sin n\pi\eta, \quad -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{an} \sin n\pi\eta \\ (w)_{x=a} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta B_n \sin n\pi\eta, \quad -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{bn} \sin n\pi\eta \\ (w)_{y=0} &= \sum_{m=1}^{\infty} \delta C_m \sin m\pi\xi, \quad -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = \sum_{m=1}^{\infty} M_{cm} \sin m\pi\xi \\ (w)_{y=b} &= \sum_{m=1}^{\infty} \delta D_m \sin m\pi\xi, \quad -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = \sum_{m=1}^{\infty} M_{dm} \sin m\pi\xi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(4)を式(5)に代入すれば積分定数 $C_{n1} \sim C_{n4}$ および $D_{m1} \sim D_{m4}$ が次のごとく決定される。

$$\left. \begin{aligned} C_{n1} &= -\frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \frac{M_{an}}{D_x} - \frac{\lambda_2^2 - \nu_y \left(\frac{a}{\pi} \right)^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \delta A_n \\ C_{n2} &= \frac{1}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sinh \pi \lambda_1} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \left(\frac{M_{an}}{D_x} \cosh \pi \lambda_1 - \frac{M_{bn}}{D_x} \right) + \frac{\lambda_2^2 - \nu_y \left(\frac{a}{\pi} \right)^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sinh \pi \lambda_1} (\delta A_n \cosh \pi \lambda_1 - \delta B_n) \\ C_{n3} &= \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \frac{M_{an}}{D_x} - \frac{\lambda_1^2 - \nu_y \left(\frac{a}{\pi} \right)^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \delta A_n \\ C_{n4} &= -\frac{1}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sinh \pi \lambda_2} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \left(\frac{M_{an}}{D_x} \cosh \pi \lambda_2 - \frac{M_{bn}}{D_x} \right) - \frac{\lambda_1^2 - \nu_y \left(\frac{a}{\pi} \right)^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sinh \pi \lambda_2} (\delta A_n \cosh \pi \lambda_2 - \delta B_n) \\ D_{m1} &= -\frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \left(\frac{b}{\pi} \right)^2 \frac{M_{cm}}{D_y} - \frac{\mu_2^2 - \nu_x \left(\frac{b}{\pi} \right)^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \delta C_m \\ D_{m2} &= \frac{1}{(\mu_1^2 - \mu_2^2) \sinh \pi \mu_1} \left(\frac{b}{\pi} \right)^2 \left(\frac{M_{cm}}{D_y} \cosh \pi \mu_1 - \frac{M_{dm}}{D_y} \right) + \frac{\mu_2^2 - \nu_x \left(\frac{b}{\pi} \right)^2}{(\mu_1^2 - \mu_2^2) \sinh \pi \mu_1} (\delta C_m \cosh \pi \mu_1 - \delta D_m) \\ D_{m3} &= \frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \left(\frac{b}{\pi} \right)^2 \frac{M_{cm}}{D_y} - \frac{\mu_1^2 - \nu_x \left(\frac{b}{\pi} \right)^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \delta C_m \\ D_{m4} &= -\frac{1}{(\mu_1^2 - \mu_2^2) \sinh \pi \mu_2} \left(\frac{b}{\pi} \right)^2 \left(\frac{M_{cm}}{D_y} \cosh \pi \mu_2 - \frac{M_{dm}}{D_y} \right) - \frac{\mu_1^2 - \nu_x \left(\frac{b}{\pi} \right)^2}{(\mu_1^2 - \mu_2^2) \sinh \pi \mu_2} (\delta C_m \cosh \pi \mu_2 - \delta D_m) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

次いで $x=0$, a および $y=0$, b における、たわみ角および反力も正弦フーリエ級数を用いて次式のごとく表わされるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta A_n \sin n\pi\eta, & \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} &= \sum_{m=1}^{\infty} \theta C_m \sin m\pi\xi \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta B_n \sin n\pi\eta, & \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} &= \sum_{m=1}^{\infty} \theta D_m \sin m\pi\xi \\ -D_x \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left\{ 4(1-\nu_x \nu_y) \frac{G_{xy}}{E_x} + \nu_y \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{an} \sin n\pi\eta, & -D_y \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left\{ 4(1-\nu_x \nu_y) \frac{G_{xy}}{E_y} + \nu_x \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right]_{y=0} &= \sum_{m=1}^{\infty} V_{cm} \sin m\pi\xi \\ -D_x \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left\{ 4(1-\nu_x \nu_y) \frac{G_{xy}}{E_x} + \nu_y \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]_{x=a} &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{bn} \sin n\pi\eta, & -D_y \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left\{ 4(1-\nu_x \nu_y) \frac{G_{xy}}{E_y} + \nu_x \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right]_{y=b} &= \sum_{m=1}^{\infty} V_{dm} \sin m\pi\xi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(4)を変形し、式(7)の左辺に代入して解けば、材端におけるたわみ角係数 θA_n , θB_n , θC_m , θD_m および反力係数 V_{an} , V_{bn} , V_{cm} , V_{dm} と曲げモーメント係数 M_{an} , M_{bn} , M_{cm} , M_{dm} およびたわみ係数 δA_n , δB_n , δC_m , δD_m との関係式が次のごとく導かれる。

たわみ角一端モーメント関係式

$$\left. \begin{aligned} \theta A_n &= A_n \frac{M_{an}}{D_x \pi} a + B_n \frac{M_{bn}}{D_x \pi} a + C_n \frac{\delta A_n}{a} + D_n \frac{\delta B_n}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[E_{nm} \frac{b}{D_y \pi} (M_{cm} - (-1)^m M_{dm}) + F_{nm} \left(\frac{\delta C_m}{b} - (-1)^m \frac{\delta D_m}{b} \right) \right] \\ \theta B_n &= -B_n \frac{M_{an}}{D_x \pi} a - A_n \frac{M_{bn}}{D_x \pi} a - D_n \frac{\delta A_n}{a} - C_n \frac{\delta B_n}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left[E_{nm} \frac{b}{D_y \pi} (M_{cm} - (-1)^m M_{dm}) + F_{nm} \left(\frac{\delta C_m}{b} - (-1)^m \frac{\delta D_m}{b} \right) \right] \\ \theta C_m &= G_m \frac{M_{cm}}{D_y \pi} b + H_m \frac{M_{dm}}{D_y \pi} b + I_m \frac{\delta C_m}{b} + J_m \frac{\delta D_m}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[K_{mn} \frac{a}{D_x \pi} (M_{an} - (-1)^n M_{bn}) + L_{mn} \left(\frac{\delta A_n}{a} - (-1)^n \frac{\delta B_n}{a} \right) \right] \\ \theta D_m &= -H_m \frac{M_{cm}}{D_y \pi} b - G_m \frac{M_{dm}}{D_y \pi} b - J_m \frac{\delta C_m}{b} - I_m \frac{\delta D_m}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[K_{mn} \frac{a}{D_x \pi} (M_{an} - (-1)^n M_{bn}) + L_{mn} \left(\frac{\delta A_n}{a} - (-1)^n \frac{\delta B_n}{a} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

反力一端モーメント関係式

$$\left. \begin{aligned} -\frac{a^2}{D_x \pi^2} V_{an} &= R_n \frac{M_{an}}{D_x \pi} a + S_n \frac{M_{bn}}{D_x \pi} a + T_n \frac{\delta A_n}{a} + U_n \frac{\delta B_n}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[V_{nm} \frac{b}{D_y \pi} (M_{cm} - (-1)^m M_{dm}) + W_{nm} \left(\frac{\delta C_m}{b} - (-1)^m \frac{\delta D_m}{b} \right) \right] \\ -\frac{a^2}{D_x \pi^2} V_{bn} &= -S_n \frac{M_{an}}{D_x \pi} a - R_n \frac{M_{bn}}{D_x \pi} a - U_n \frac{\delta A_n}{a} - T_n \frac{\delta B_n}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left[V_{nm} \frac{b}{D_y \pi} (M_{cm} - (-1)^m M_{dm}) + W_{nm} \left(\frac{\delta C_m}{b} - (-1)^m \frac{\delta D_m}{b} \right) \right] \\ -\frac{b^2}{D_y \pi^2} V_{cm} &= M_m \frac{M_{cm}}{D_y \pi} b + N_m \frac{M_{dm}}{D_y \pi} b + P_m \frac{\delta C_m}{b} + Q_m \frac{\delta D_m}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_{mn} \frac{a}{D_x \pi} (M_{an} - (-1)^n M_{bn}) + Y_{mn} \left(\frac{\delta A_n}{a} - (-1)^n \frac{\delta B_n}{a} \right) \right] \\ -\frac{b^2}{D_y \pi^2} V_{dm} &= -N_m \frac{M_{cm}}{D_y \pi} b - M_m \frac{M_{dm}}{D_y \pi} b - Q_m \frac{\delta C_m}{b} - P_m \frac{\delta D_m}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[X_{mn} \frac{a}{D_x \pi} (M_{an} - (-1)^n M_{bn}) + Y_{mn} \left(\frac{\delta A_n}{a} - (-1)^n \frac{\delta B_n}{a} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(8)は直線部材におけるいわゆる座屈たわみ角式に相当し、右辺の諸係数はすべて所要の固有値 R , Q を含んで次式の内容をもつ。

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_1 \coth \pi \lambda_1 - \lambda_2 \coth \pi \lambda_2) & B_n &= \frac{-1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_1 \operatorname{cosech} \pi \lambda_1 - \lambda_2 \operatorname{cosech} \pi \lambda_2) \\
C_n &= \frac{\pi}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left\{ \lambda_1 (\lambda_1^2 - \nu_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2) \coth \pi \lambda_1 - \lambda_2 (\lambda_2^2 - \nu_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2) \coth \pi \lambda_2 \right\}, & D_n &= \frac{-\pi}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left\{ \lambda_1 (\lambda_1^2 - \nu_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2) \operatorname{cosech} \pi \lambda_1 - \lambda_2 (\lambda_2^2 - \nu_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2) \operatorname{cosech} \pi \lambda_2 \right\} \\
E_{mn} &= \frac{2}{\pi} \frac{\delta}{\alpha} \frac{m'n'}{(\mu_1^2 + n'^2)(\mu_2^2 + n'^2)} & F_{mn} &= \frac{2\delta}{\pi} \frac{m'n'}{(\mu_1^2 + n'^2)(\mu_2^2 + n'^2)} \left\{ \mu_1^2 + \mu_2^2 + n'^2 - \nu_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \\
G_m &= \frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \coth \pi \mu_1 - \mu_2 \coth \pi \mu_2) & H_m &= \frac{-1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (\mu_1 \operatorname{cosech} \pi \mu_1 - \mu_2 \operatorname{cosech} \pi \mu_2) \\
I_m &= \frac{\pi}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \left\{ \mu_1 (\mu_1^2 - \nu_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2) \coth \pi \mu_1 - \mu_2 (\mu_2^2 - \nu_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2) \coth \pi \mu_2 \right\}, & J_m &= \frac{-\pi}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \left\{ \mu_1 (\mu_1^2 - \nu_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2) \operatorname{cosech} \pi \mu_1 - \mu_2 (\mu_2^2 - \nu_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2) \operatorname{cosech} \pi \mu_2 \right\} \\
K_{mn} &= \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\delta} \frac{m'n}{(\lambda_1^2 + m'^2)(\lambda_2^2 + m'^2)} & L_{mn} &= \frac{2\alpha}{\pi} \frac{m'n}{(\lambda_1^2 + m'^2)(\lambda_2^2 + m'^2)} \left\{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + m'^2 - \nu_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\}
\end{aligned}$$

式(9)の諸係数も同様に R, Q の函数として表示され次式となる。

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left\{ \lambda_1 \left\{ \lambda_1^2 - k_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \coth \pi \lambda_1 - \lambda_2 \left\{ \lambda_2^2 - k_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \coth \pi \lambda_2 \right\}, & S_n &= \frac{-\pi}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left\{ \lambda_1 \left\{ \lambda_1^2 - k_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \operatorname{cosech} \pi \lambda_1 - \lambda_2 \left\{ \lambda_2^2 - k_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \operatorname{cosech} \pi \lambda_2 \right\} \\
T_n &= \frac{\pi}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left\{ \lambda_1 \left\{ \lambda_1^2 - k_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \left\{ \lambda_2^2 - \nu_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \coth \pi \lambda_1 - \lambda_2 \left\{ \lambda_2^2 - k_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \left\{ \lambda_1^2 - \nu_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \coth \pi \lambda_2 \right\} \\
U_n &= \frac{-\pi}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left\{ \lambda_1 \left\{ \lambda_1^2 - k_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \left\{ \lambda_2^2 - \nu_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \operatorname{cosech} \pi \lambda_1 - \lambda_2 \left\{ \lambda_2^2 - k_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \left\{ \lambda_1^2 - \nu_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \operatorname{cosech} \pi \lambda_2 \right\} \\
V_{mn} &= -\frac{2}{\pi} \frac{\delta}{\alpha} \frac{m'n}{(\mu_1^2 + m'^2)(\mu_2^2 + n'^2)} \left\{ m'^2 + k_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} & X_{mn} &= -\frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\delta} \frac{m'n}{(\lambda_1^2 + m'^2)(\lambda_2^2 + n'^2)} \left\{ n'^2 + k_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \\
W_{mn} &= -\frac{2\delta}{\pi} \frac{m'n}{(\mu_1^2 + m'^2)(\mu_2^2 + n'^2)} \left\{ m'^2 (\mu_1^2 + \mu_2^2) - k_x (\frac{\alpha}{\delta})^2 \mu_1^2 \mu_2^2 + \{ n'^2 (1 - \nu_x k_x) - \nu_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \} m'^2 \right\} \\
Y_{mn} &= -\frac{2\alpha}{\pi} \frac{m'n}{(\lambda_1^2 + m'^2)(\lambda_2^2 + n'^2)} \left\{ n'^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - k_y (\frac{\alpha}{\delta})^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \{ m'^2 (1 - \nu_y k_y) - \nu_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \} n'^2 \right\} \\
M_m &= \frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \left\{ \mu_1 \left\{ \mu_1^2 - k_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \coth \pi \mu_1 - \mu_2 \left\{ \mu_2^2 - k_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \coth \pi \mu_2 \right\}, & N_m &= \frac{-1}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \left\{ \mu_1 \left\{ \mu_1^2 - k_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \operatorname{cosech} \pi \mu_1 - \mu_2 \left\{ \mu_2^2 - k_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \operatorname{cosech} \pi \mu_2 \right\} \\
P_m &= \frac{\pi}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \left\{ \mu_1 \left\{ \mu_1^2 - k_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \left\{ \mu_2^2 - \nu_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \coth \pi \mu_1 - \mu_2 \left\{ \mu_2^2 - k_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \left\{ \mu_1^2 - \nu_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \coth \pi \mu_2 \right\} \\
Q_m &= \frac{-\pi}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \left\{ \mu_1 \left\{ \mu_1^2 - k_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \left\{ \mu_2^2 - \nu_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \operatorname{cosech} \pi \mu_1 - \mu_2 \left\{ \mu_2^2 - k_y (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \left\{ \mu_1^2 - \nu_x (\frac{m\alpha}{\delta})^2 \right\} \operatorname{cosech} \pi \mu_2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{但し } k_x = 4(1 - \nu_x \nu_y) \frac{G_{xy}}{E_x} + \nu_y, \quad k_y = 4(1 - \nu_x \nu_y) \frac{G_{xy}}{E_y} + \nu_x$$

3. 連続条件および端部条件

図-2のごとき x, y 座標を図-1の二方向連続板の各ブロックごととに設け、 $x_{i,j} = a_i$, $y_{i,j} = b_j$ なる節線がそれぞれ $x_{i+1,j} = 0$, $y_{i,j+1} = 0$ と一致することと定めれば各ブロックごととに材端のためみ角係数 $(\theta_{An})_{i,j}$, $(\theta_{Bn})_{i,j}$, $(\theta_{Cm})_{i,j}$, $(\theta_{Dm})_{i,j}$ 端部-メント係数 $(M_{An})_{i,j}$, $(M_{Bn})_{i,j}$, $(M_{Cm})_{i,j}$, $(M_{Dm})_{i,j}$ 反力係数 $(V_{An})_{i,j}$, $(V_{Bn})_{i,j}$, $(V_{Cm})_{i,j}$, $(V_{Dm})_{i,j}$ ためみ角係数 $(\delta_{An})_{i,j}$, $(\delta_{Bn})_{i,j}$, $(\delta_{Cm})_{i,j}$, $(\delta_{Dm})_{i,j}$ など前記2の内容で定義される。ブロック i, j 板とブロック $i+1, j$ 板およびブロック $i, j+1$ 板の節線 $i+1$ および節線 $j+1$ では $(M_{Bn})_{i,j} = (M_{An})_{i+1,j} = (M_n)_{i+1,j}$, $(M_{Dm})_{i,j} = (M_{Cm})_{i,j+1} = (M_m)_{i,j+1}$, $(\delta_{Bn})_{i,j} = (\delta_{An})_{i+1,j} = (\delta_n)_{i+1,j}$, $(\delta_{Dm})_{i,j} = (\delta_{Cm})_{i,j+1} = (\delta_m)_{i,j+1}$ となりこれらを考慮してためみ角の連続条件式 $(\theta_{Bn})_{i,j} = (\theta_{An})_{i+1,j}$, $(\theta_{Dm})_{i,j} = (\theta_{Cm})_{i,j+1}$ とてれば次の関係式が $i = 1, 2, 3, \dots, I-1$ (I は x 方向の連続板の径間数), $j = 1, 2, 3, \dots, J-1$ (J は y 方向の連続板の径間数) に対して成立する。

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \overline{B}_{i,j} (M_n)_{i,j} + (\overline{A}_{i,j} + \overline{A}_{i,j}) (M_n)_{i+1,j} + \overline{B}_{i+1,j} (M_n)_{i+2,j} + \overline{D}_{i,j} (\delta_n)_{i,j} + (\overline{C}_{i,j} + \overline{C}_{i,j}) (\delta_n)_{i+1,j} + \overline{D}_{i+1,j} (\delta_n)_{i+2,j} \\
& + \sum_{k=1}^i \left[\overline{E}_{i+1,j} (M_m)_{i+1,j} - (-1)^k (M_m)_{i+1,j+1} \right] - (-1)^m \overline{E}_{i,j} \left\{ (M_m)_{i,j} - (-1)^m (M_m)_{i,j+1} \right\} \\
& + \sum_{k=1}^j \left[\overline{F}_{i,j+1} (\delta_m)_{i,j+1} - (-1)^k (\delta_m)_{i,j+1+1} \right] - (-1)^m \overline{F}_{i,j} \left\{ (\delta_m)_{i,j} - (-1)^m (\delta_m)_{i,j+1} \right\} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (10) \\
& \left. \begin{aligned}
& \overline{H}_{i,j} (M_m)_{i,j} + (\overline{G}_{i,j+1} + \overline{G}_{i,j}) (M_m)_{i,j+1} + \overline{H}_{i,j+1} (M_m)_{i,j+2} + \overline{J}_{i,j} (\delta_m)_{i,j} + (\overline{I}_{i,j+1} + \overline{I}_{i,j}) (\delta_m)_{i,j+1} + \overline{J}_{i,j+1} (\delta_m)_{i,j+2} \\
& + \sum_{k=1}^i \left[\overline{K}_{i,j+1} (M_n)_{i,j+1} - (-1)^k (M_n)_{i+1,j+1} \right] - (-1)^n \overline{K}_{i,j} \left\{ (M_n)_{i,j} - (-1)^n (M_n)_{i+1,j} \right\} \\
& + \sum_{k=1}^j \left[\overline{L}_{i,j+1} (\delta_n)_{i,j+1} - (-1)^k (\delta_n)_{i+1,j+1} \right] - (-1)^n \overline{L}_{i,j} \left\{ (\delta_n)_{i,j} - (-1)^n (\delta_n)_{i+1,j} \right\} = 0
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{A}_{i,j} &= (A_n)_{i,j} a_i / \pi \cdot D x_i, & \overline{B}_{i,j} &= (B_n)_{i,j} a_i / \pi \cdot D x_i, & \overline{C}_{i,j} &= (C_n)_{i,j} / a_i, & \overline{D}_{i,j} &= (D_n)_{i,j} / a_i \\ \overline{E}_{i,j} &= (E_{mn})_{i,j} b_j / \pi \cdot D y_j, & \overline{H}_{i,j} &= (H_m)_{i,j} b_j / \pi \cdot D y_j, & \overline{F}_{i,j} &= (F_{mn})_{i,j} / b_i, & \overline{I}_{i,j} &= (I_{mn})_{i,j} / b_j \\ \overline{G}_{i,j} &= (G_m)_{i,j} b_j / \pi \cdot D y_j, & \overline{K}_{i,j} &= (K_{mn})_{i,j} a_j / \pi \cdot D x_j, & \overline{J}_{i,j} &= (J_m)_{i,j} / b_j, & \overline{L}_{i,j} &= (L_{mn})_{i,j} / a_j \end{aligned}$$

いま連続板は中間節線で単純支持されるものとするば、式(10)の δ は連続板の周辺自由時に限り考慮すればよく中間節線上の δ はすべて消滅する。式(10)に加えて端辺条件式として次式が成り立つ。

すなわちブロック1, j 板の節線1を例にとって示せば

$$\left. \begin{aligned} (1) \text{ 単純支持された場合 } & (M_n)_{1,j} = (\delta_n)_{1,j} = 0 \\ (2) \text{ 固定された場合 } & (\delta_n)_{1,j} = 0, (\theta_n)_{1,j} = \overline{A}_{1,j} (M_n)_{1,j} + \overline{B}_{1,j} (M_n)_{2,j} + \sum_{m=1}^{\infty} \{ (M_m)_{1,j} - (-1)^m (M_m)_{1,j+1} \} = 0 \\ (3) \text{ 自由の場合 } & (M_n)_{1,j} = 0 \\ & N \{ \overline{B}_{1,j} (M_n)_{2,j} + \overline{C}_{1,j} (\delta_n)_{1,j} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{E}_{1,j} \{ (M_m)_{1,j} - (-1)^m (M_m)_{1,j+1} \} \} + \overline{H}_{1,j} \{ \overline{D}_{1,j} (M_n)_{2,j} + \overline{I}_{1,j} (\delta_n)_{1,j} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{V}_{1,j} \{ (M_m)_{1,j} - (-1)^m (M_m)_{1,j+1} \} \} = 0 \end{aligned} \right\} (11)$$

他の端辺についても全く同様の条件式が成立する。よって式(10)および端辺条件式(11)がすべて0でない $(M_n)_{i,j}, (M_m)_{i,j}, (\delta_n)_{i,j}, (\delta_m)_{i,1}, (\delta_n)_{i,H,j}, (\delta_m)_{i,J,H}$ をもつためにはこれら諸式の係数行列式が0となるいわゆる座屈条件式が成立し、これより所要の座屈荷重が決定される。

4. 座屈波形

任意の座屈荷重に対応する連続板の座屈波形は式(4)より得られるが同式の積分定数 $C_{n1} \sim C_{n4}, D_{m1} \sim D_{m4}$ は節線のモーメント係数 $(M_n)_{i,j}$ およびたわみ係数 $(\delta_n)_{i,j}$ すなわち前節で述べた連立一次方程式の根により式(6)のごとく表わされるゆえ、結局前記同次方程式を解く必要がある。

端辺条件式および連続条件式よりなる同次方程式の任意の一式は残りの式の一次結合によって表わされるゆえ、任意の一式を除いて得られる連立一次方程式をとけば、ある特定未知数に対する残りのすべての未知数の比が決定され、上述のごとく式(4)より座屈波形が算定されることとなる。

5. 結語

式(8)のたわみ角—端モーメント関係式を基礎として端辺が単純支持、固定もしくは自由で中間節線が単純に支持される二方向連続直交異方性矩形板が二方向から周辺直圧力を受ける場合の座屈荷重および座屈波形の算定式を提示した。材端の曲げモーメントとたわみとを未知数として取り扱う本法は積分定数をそのまま未知数とする微分方程式系の解法に比較して未知数を著しく減少しうる点で極めて有利であり、また座屈条件式たる多元行列式の各要素も全く機械的に配列できるゆえ電子計算機のプログラミングに手間を要せず、予め準備された行列式計算のサブルーチンに直結させて迅速かつ高精度に座屈荷重を求めることができる。