

東京大学工学部 正員 奥村敏恵
名古屋工業大学 正員 〇松浦 聖

まえがき アーチに関する安定性の吟味、すなわち、アーチの面内および面外に関する弾性座屈や振動、さらに極限崩壊荷重などに関する研究は、従来からいろいろ行なわれているが、ここでは図-1に示すような2本のテーパーのついたアーチを解析の対象としている。解析にはテーパーの角度歪の影響にとくに注目している。アーチは円弧で、両端は面(I, II)に垂直な軸をもつヒンジとし、スパン中央Cは剛節とする。解析のオ1として弾性座屈値の算定を行っている。これはすでにオ2/回年次学術講演会にて発表したものを、さらに進めて検討を加えたもので、かく種座屈形(図-2)に対する座屈値を、主として厳密解によって求めた。その結果を

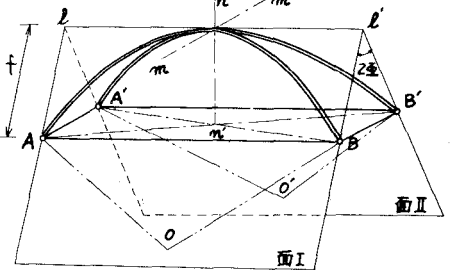


図-1 アーチ見取図

比較考察してみると対称座屈値が通常最も吟味を要することがわかった。なお荷重は面内中心方向に放射軸に沿って q の等分布荷重が作用する場合を考えている。解析のオ2は、かゝるアーチの固有振動性状に関するものである。その計算に当つては、さきに発表した、かゝるアーチの応力変形の解析や、また以下に述べる座屈値の算定計算とは密接した関係関連があるが、

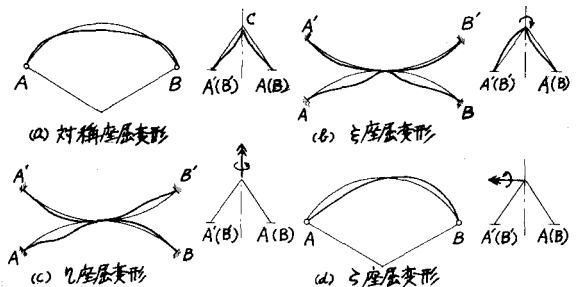


図-2 座屈変形状態

とくに F.W. Walthering のアーチ面内振動に関する論文を参照している。

I 座屈に関する解析 座屈変形状態として図-2に示すモードにつき考察している。座屈軸 x, y, z , 変位 $u, v, w=R\psi, \varphi$, 断面力などを図-3, 4, 5のようにとれば、座屈のさい生ずべき全ポテンシャルエネルギー $-W$ は、まずつぎのように考えておいてよい。

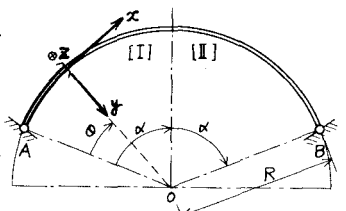


図-3 アーチ変形図

$$W = \left(\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} F_1 (\psi_1' + \psi_2')^2 + \frac{1}{2} F_2 (\psi_1'' - \psi_2'')^2 + \frac{1}{2} F_3 (u_1' + u_2')^2 + M_{\alpha\alpha} (\psi_1' + \psi_2') - M_{\beta\beta} (\psi_1'' - \psi_2'') \right] d\theta \right. \\ \left. + \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} F_1 (\psi_1' + \psi_2')^2 + \frac{1}{2} F_2 (\psi_1'' - \psi_2'')^2 + \frac{1}{2} F_3 (u_1' + u_2')^2 + M_{\alpha\alpha} (\psi_1' + \psi_2') - M_{\beta\beta} (\psi_1'' - \psi_2'') \right] d\theta \right) \dots \dots (1)$$

こゝで $F_1 = \frac{EI}{R}$, $F_2 = \frac{GI}{R}$, $F_3 = \frac{EI}{R}$ で、断面力変位関係の添字のうち、 α は座屈直前に働いていた値を、 β は図-3における[I][II]

の、かく値を示す。こゝで座屈変形は座屈応力 N_{α} に対して、図-4変位の符号

図-5 断面力の符号

平衡でなければならぬから、式(1)のポテンシャルエネルギー $-W$ は最小値をとる、すなわち変分 $\delta W=0$

と境界条件を考慮して、連立微分方程式が導かれる。これを解けば(2)のような変位を表わす式を得る。

$$\eta_1 = A_1 e^{\lambda_1 \theta} + A_2 e^{\lambda_2 \theta} + A_3 \sin \lambda_3 \theta + A_4 \cos \lambda_3 \theta, \quad \eta_1' = B_1 \sin \lambda_3 \theta + B_2 \cos \lambda_3 \theta + B_3 \sin \lambda_4 \theta + B_4 \cos \lambda_4 \theta, \quad \eta_2 = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 \theta} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 \theta} + A_3 \lambda_3 \sin \lambda_3 \theta + A_4 \lambda_3 \cos \lambda_3 \theta + A_5 \theta + A_6 \dots \dots (2)$$

 ここで、 A_1, A_2, B_1, B_2 は積分常数、 λ_1, λ_2 は所定の常数で λ_3 は $\lambda_3 = \sqrt{\frac{N_0}{EI_R}}$ であり N_0 を含んでいる。さらに、かく座屈形に対する境界条件が、つぎの式(3)のように考えられるから、この条件式(3)を(2)式に代入し、 A_i, B_i が同時に0となる以外の値を有するために必要な条件式、すなわち係数行列式の値が0でなければならないという座屈条件式を満足する N_0 を求めれば、よいことになる。

(a) 対称座屈の場合、 $\theta=0; \quad \eta_1=0, \eta_1'=0, \eta_2=0, \eta_2'=0, \eta_2''=0$
 $\theta=\alpha; \quad \eta_1=0, \eta_2=0, \eta_1' - \frac{\tan \alpha}{R} \eta_2' = 0, \eta_2'=0, -R E_2 \eta_2''' + \tan \alpha F_3 \eta_1' + \tan \alpha F_4 \eta_2' - \tan \alpha F_5 \eta_2''' = 0 \dots (3.a)$

(b) ξ 座屈の場合、始点; $\eta_1=\eta_2=0, \eta_1'=\eta_2'=0, \eta_1=\eta_2=0, \eta_1'=\eta_2'=0, \eta_1''=\eta_2''=0$
 C 点不動の場合: $\eta_1=\eta_2=0, \eta_1'=\eta_2'=0, \eta_1=\eta_2=0, \eta_1'=\eta_2'=0, \eta_1+\eta_2=0, \eta_1'+\eta_2'=0 \dots (3.b)$

C 点が任意のところに動く場合: (3.b1) でクラウンのところの条件式が異ってくる。

$$\eta_1'=\eta_2'=0, \eta_1'=\eta_2'=0, \eta_1=\eta_2, \eta_1'+\eta_2'=0, \xi_1=\frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha) + \xi_2 \sin(\frac{\pi}{2}-2\alpha), \eta_2=-\frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2}-2\alpha) + \xi_2 \cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha) \dots (3.b2)$$

$$\cos 2\alpha \{ -g(\xi_1'''+\xi_2''') + \sin 2\alpha \{ h(\eta_1'+\eta_2') - (\eta_1''-\eta_2'') \} + g(\xi_2'''+\xi_2''') - \cos 2\alpha \{ h(\eta_1'+\eta_2') - (\eta_1''-\eta_2'') \} \} = 0$$

(c) η 座屈の場合、クラウンでは、つぎのように考えればよい。

$$h = \frac{GJ}{EI_y}, \quad g = \frac{EI_z}{EI_y}$$

$$\eta_1=\eta_2=0, \eta_1'=\eta_2'=0, \eta_1=\eta_2=0, \eta_1'+R\eta_2'\tan \alpha=0, \eta_2'+R\eta_1'\tan \alpha=0, \eta_1'-\eta_2'=0, R \tan \alpha \eta_1' - F_3 \eta_2' - R \tan \alpha \eta_2' + R \tan \alpha F_5 \eta_2' = 0 \dots (3.c)$$

(d) ξ 座屈の場合、 η 座屈における $\tan \alpha$ を $-\cot \alpha$ と置き換えればよい。

・数値計算例: $R=50m, l=60m, f=10m, D(\text{パイプ外径})=50cm, t(\text{肉厚})=1cm$ にとれば、
 ξ 座屈; $\alpha=1^\circ: N_0=88.65 \text{ ton}, 10^\circ: 89.77 \text{ ton}, 15^\circ: 106.00 \text{ ton}, \eta$ 座屈; $1^\circ: 166.52 \text{ ton},$
 対称座屈; $10^\circ: 208 \text{ ton}, \xi$ 座屈; $5^\circ: 200 \text{ ton}$ (C 点が動くとき), $5^\circ: 370 \text{ ton}$ (C 点が不動のとき)

・つぎに、式(1)のポテンシャルエネルギー $-W$ に、さらに軸力の歪エネルギー $-\frac{1}{2EA} \left(\frac{d\eta}{d\theta} - \frac{\eta}{R} \right)^2 d\theta \times N_0$ のなす仕事で $\int N_0 \left(\frac{d\eta}{d\theta} - \frac{\eta}{R} \right)^2 d\theta$ などとも考慮に入れるとすれば、例えば ξ 座屈の場合、 η の積分常数に関する境界条件として、始点で $\eta_1=\eta_2=0$ 、クラウンで $\left(\frac{d\eta}{d\theta} \right) = \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right) = 0$ の4つをさらに考慮すればよい。

II 固有振動に関する解析 振動数方程式は、およそつぎのようにして算定され得る。ここではエネルギー法によらず、釣り合い条件式から求めてみる。いま、部材の単位長さ当りの質量を μ 、 x, y, z 方向およびねじりによる慣性力を X, Y, Z, M_θ すなわち $X = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, Y = -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, Z = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, M_\theta = -\frac{\mu J \partial^2 \theta}{A \partial t^2}$ とすれば、アーチに対してはつぎの釣り合い条件式(4)が成立する。

$$\frac{dN}{d\theta} - S_y + XR = 0, \frac{dS_y}{d\theta} + N + YR = 0, \frac{dM_x}{d\theta} - S_y R = 0, \frac{dS_z}{d\theta} + ZR = 0, \frac{dM_y}{d\theta} - M_\theta + RM_\theta = 0, RS_z - \frac{dM_z}{d\theta} - M_z = 0 \dots (4)$$

ここで応力と歪との関係式 $M_x = F_1 \left(\frac{d\theta}{d\theta} + \frac{1}{R} \frac{d\theta}{d\theta} \right), M_y = -F_2 \left(\frac{1}{R} \frac{d\theta}{d\theta} - \theta \right), M_z = -F_3 R \left(\frac{d\theta}{d\theta} + \frac{d\theta}{d\theta} \right), N = F_4 \left(\frac{d\theta}{d\theta} - \theta \right) \dots (5)$

を(4)式に適用すれば、変位に関する連立方程式が得られる。さらに $u = \bar{u} \cos \omega t, v = \bar{v} \cos \omega t \dots (6)$ とおけば、例えば $\bar{u}, \bar{v}$ に関しては、つぎのような微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\theta^2} + (2 + \alpha k) \frac{d^2 \bar{u}}{d\theta^2} + (1 - k - \alpha k) \frac{d^2 \bar{u}}{d\theta^2} + (k - \alpha k^2) \bar{u} = 0, \frac{d^2 \bar{v}}{d\theta^2} + (2 + \delta \epsilon f) \frac{d^2 \bar{v}}{d\theta^2} - (1 + f + \delta f) \frac{d^2 \bar{v}}{d\theta^2} - (\delta \epsilon f^2 - \epsilon f^2) \bar{v} = 0 \dots (7)$$

 ここで $\alpha, \delta, \epsilon, k = \frac{\mu R^2}{EI_x} \omega^2, f = \frac{\mu R^2}{EI_y} \omega^2$ は無次元パラメーターである。したがって、これを解けばよいが、さらに、かく種振動形に対する境界条件、固有振動数の算定には、I に述べた座屈形に対応したその境界条件は、そのまゝ適用でき、固有値問題としての取り扱いも全く同様の手順を踏めばよい。

数値計算例: 鉛直方向対称振動を I と同じ手法で考えれば、 $\alpha=0^\circ: n=2.76 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, 5^\circ: 2.74, 15^\circ: 2.55$
 振動計算を模型実験値と比較して、ほど妥当と思われるが、実験に関しては後章中である。文献は省略する。