

九州大学工学部 正員 山崎徳也

。 応用力学研究所 熊井豊二

。 大学院 学生員 〇後藤恵三輔

1. 緒言

土木、造船、航空等における薄板構造物の構成要素として、円孔を有する薄板が圧縮力、せん断力、曲げモーメントあるいはそれらの合力等の面内荷重によって座屈することはいくつもの周知のとおりであるが、面内荷重にはそれだけでなく、引張力をも考慮しなければならない。その際引張力は全方向に作用するのではなく、一方向のみ作用するものとすれば、薄板の円孔縁には引張応力とともに圧縮応力が生じ、これによって円孔付近に逆材料の局部座屈が起ることを考えらる。そこで著者は、円孔を有する無限薄板が孔の遠方において一軸方向の一様引張りを受けるとき円孔付近に局部座屈が起りうることを提言し、円孔縁の境界条件として i) 自由、ii) 単純支持の二つの場合を考え、そのおのおのについて座屈荷重の近似値を、円孔の半径と板厚との比を表数として、エナルゲニ法により算定し、解析を行なった。

2. 座屈荷重の算定

円孔を有する無限薄板が孔の遠方において一軸方向の一様引張りを受けるとき二次元応力は、円孔中心を原点とする極座標 r, θ を用いて次のように表わされる。(図-1参照)

すなわち、円孔の半径 a に比較して大きな b を半径とする同心円を囲まれた部分も考えれば、 $r=b$ における応力は Saint-Venant の原理により孔の無い場合の応力に等しく、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{r=b} &= \sigma \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sigma \cos 2\theta \\ (\tau_{r\theta})_{r=b} &= \frac{1}{2} \sigma \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

== 1 = σ = 孔の遠方において x 軸方向に薄板に作用する単位面積当たりの引張力。

$\sigma_r, \tau_{r\theta}$ = r および θ 方向の直応力

$\tau_{\theta\theta}$ = せん断応力。

== 2 = より求まる応力は、 $r=a$ において $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ 、かつ $r=b$ において $\sigma_r = \frac{1}{2} \sigma$ 、 $\tau_{r\theta} = 0$ を満足する応力函数 χ_1 と、同じく $r=a$ において $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ 、かつ $r=b$ において $\sigma_r = \frac{1}{2} \sigma \cos 2\theta$ 、 $\tau_{r\theta} = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\theta$ を満足する応力函数 χ_2 とにより決定される。この二つの応力函数の適合条件 $\nabla^4 \chi = 0$ を満足する解はそれぞれ次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= C_1 \log r + C_2 r^2 \log r + C_3 r^2 + C_4 \\ \chi_2 &= (C_1' r^2 + C_2' r^4 + C_3' \frac{1}{r^2} + C_4') \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

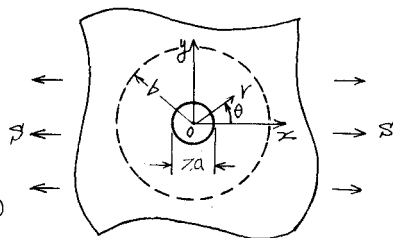


図-1

未定常数 $C_1, C_2, \dots, C_1', C_2', \dots \in$ 境界条件より決定するに当り $q/b \neq 0$ とおけば、 $\Rightarrow$ 4.5.1. を用いて、次のように求められる。

$$C_1 = -\frac{q^2}{2} \beta, C_2 = 0, C_3 = \frac{1}{4} \beta, (C_4 \text{ は応力に無関係}), C_1' = -\frac{1}{4} \beta, C_2' = 0, C_3' = -\frac{q^2}{4} \beta, C_4' = \frac{q^2}{2} \beta$$

したがって所要の応力 σ 次式でえられることになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (X_1 + X_2) = \frac{\beta}{2} \left\{ 1 - \frac{q^2}{\beta^2} + (1 + 4 \frac{q^2}{\beta^2} + 3 \frac{q^4}{\beta^4}) \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (X_1 + X_2) = \frac{\beta}{2} \left\{ 1 + \frac{q^2}{\beta^2} - (1 + 3 \frac{q^4}{\beta^4}) \cos 2\theta \right\} \\ \tau_{r\theta} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right) (X_1 + X_2) = -\frac{\beta}{2} (1 + 2 \frac{q^2}{\beta^2} - 3 \frac{q^4}{\beta^4}) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

上記薄板の座屈荷重 β_{cr} は、座屈の際の平衡方程式および、境界条件を満足する薄板のためみ波形 w が求まれば正しく決定されるが、二のようないみ波形を求めることは非常に困難であるから、本論では有力な近似解法であるエネルギー法を用いて座屈荷重の近似値を求めた。

まず、薄板の曲げによる歪みエネルギー おび座屈の際に応力のなす仕事をそれぞれ V, T とすれば、それらは x, y 座標 (図-1 参照) の次のように表わされる。

$$V = \frac{D}{2} \iint_{\text{surface}} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \dots\dots\dots (4)$$

$$T = \frac{t}{2} \iint_{\text{surface}} \left\{ \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \dots\dots\dots (5)$$

$D =$ 薄板の曲げ剛性 $= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$
 $E =$ ヤング率 $t =$ 板厚
 $\nu =$ ポアソン比

$\sigma_x, \sigma_y =$ x おび y 方向の直応力。

$\tau_{xy} =$ せん断応力。

式(4)、(5)を極座標で表すために次の変換式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= \left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \right) \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

式(6)を式(4)、(5)に代入して、極座標でのエネルギー式は結局、次のようになる。

$$V = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \right] r dr d\theta \dots\dots (7)$$

$$T = \frac{t}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ \sigma_r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + 2\tau_{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \sigma_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \dots\dots\dots (8)$$

座屈荷重 β_{cr} は、おびの境界条件を満足するためみ波形 w を仮定して、これをエネルギーの式(7)、(8)に代入し、さらに式(3)の応力系を式(8)に代入した上で式(7)と式(8)とを等置することによって直ちに決定される。 w を仮定する場合、座屈荷重が最小となるように仮定することは勿論である。

すなわち、いまためみ波形 w を各孔縁条件に支して

次のように仮定する。(図-2 参照)

$$\text{自由: } w = w_0 \left(\frac{q}{\beta} + A \frac{q^2}{\beta^2} + B \frac{q^3}{\beta^3} \right) \cos \theta \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{単純支持: } w = w_0 \left(\frac{q}{\beta} + A \frac{q^2}{\beta^2} + B \frac{q^3}{\beta^3} \right) \sin \theta \dots\dots\dots (10)$$

w_0 は unit deflection であり、 A, B は各孔縁

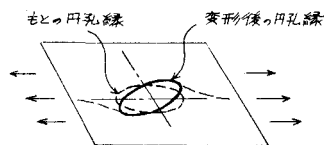


図-2

条件により決定される常数である。式(9)および式(10)が孔の遠方における境界条件、 $(w)_{r=a}=0$ 、 $(\frac{\partial w}{\partial r})_{r=a}=0$ を満足していることは明らかである。

円孔縁 $r=a$ における各境界条件は次のごとく表わされる。

自由: $(M_r)_{r=a}=0$ 、 $(Q_r - \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta})_{r=a}=0$ ----- (11)

単純支持: $(w)_{r=a}=0$ 、 $(M_r)_{r=a}=0$ ----- (12)

ここに $M_r = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\}$

$M_{\theta} = (1-\nu)D \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$

$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$

式(11)の第1式および第2式は、それぞれ曲げモーメントおよびせん断力 Q_r が孔縁において消失することを意味する。たわみ波形の式(9)、(10)を境界条件式(11)、(12)に代入して、各孔縁条件に対するたわみ波形の係数 A 、 B を決定すれば表-1のごとくである。ただし $\nu=1/3$ とする。

さて、たわみ波形の式(9)、(10)をエネルギーの式(7)、(8)に代入すれば、 V および T はそれぞれ次のごとくえられる。

$V = \frac{\pi D}{2a^2} \cdot W$ ----- (13)

$T = \frac{\pi g t}{8} \cdot W$ ----- (14)

ここに W および W は無次元数として A 、 B の函数として各孔縁条件に対し次のごとく与えられる。

自由、単純支持: $W = \frac{8}{3} + 8A + \frac{32}{3}B + \frac{15}{2}A^2 + \frac{160}{9}AB + \frac{56}{3}B^2$

$W = 1 + \frac{32}{21}A + \frac{7}{8}B + \frac{17}{24}A^2 + \frac{107}{105}AB + \frac{17}{30}B^2$

式(13)と式(14)とを等置すれば 所要の座屈荷重 S_{cr} が次のごとく求められることになる。

$S_{cr} = k \frac{E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a} \right)^2$ ----- (15)

ここに $k = 4 \frac{W}{W}$ ----- (16)

各孔縁条件に対する k の値を表-2に示

し、同じく S_{cr} は円孔の半径 a と板厚 t との比を参数として図-3に示した。

3. 考察および結論

本論は、円孔を有する無限薄板が孔の遠方において一軸方向の一様引張りを受けますの座屈荷重の近似値を、種々の孔縁条件のもとに求めたものである。兎に、円孔を有する有限薄板を無限薄板として取扱っているため、実際とは多少条件が異なるが、孔径が有限薄板の辺長に比較して小なる場合には、かかる取扱いで差し支えなく、上述のごとく、円孔付近に逆材料の局部座屈が起

表-1

孔縁条件	自由	単純支持
A	-0.8000	-1.5294
B	0.2500	0.5294

表-2

孔縁条件	自由	単純支持
k	3.698	4.992

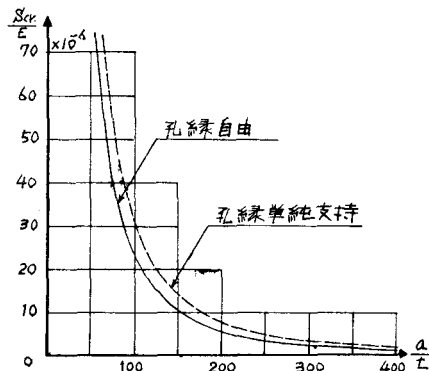


図-3

うることが明白となった。

図-3 に示すごとく、座屈荷重 S_{cr} と円孔半径の板厚に対する比 a/t との関係は、長柱の座屈に関する Euler-curve に酷似しており、 a/t が Euler 公式の細長比に相当する。

座屈の際のたかか波形を逆対称と仮定して11るが(式(9)および式(10))、これは常識的に言って、円孔を有する無限薄板が引張力を受けて座屈するとすれば、座屈波形は荷重方向と直角な方向に一つの節を有する、いわゆる逆対称波形となるという考えによるもので、別に一節対称波形を全く否定するわけではなく、当然その実験検証が必要であり、これからおよび有限薄板としての厳密な計算については後日発表の予定である。