

室蘭工業大学 正員 中村作太郎
 室蘭工業大学 正員 志村 政雄

1 緒言

支間に比べ、比較的背の高い単純桁の応力現象については、すでに Coker, Filon, 福原達三, Frocht, Wilson, Stokes, Boussinesq, Lamb などの諸氏により種々研究されたところであるが、著者はこの問題に興味を持ち、数年前より研究を重ねた結果、いままで知られない数種の面白い現象を発見した。支間に比べ、断面高さ h の著しく大きな壁梁については、建築構造においても種々問題とされており、最近、Karl Girkmann, Kurt Beyer 氏などの著書にも掲載されている通り、 $h/l > 0.50$ の場合については、Beam Theory では満足されず、Scheibe 理論を用いるべきであるとされている。著者の研究結果から見ても、大体において、 $h/l \cong 0.50$ が Beam Theory の用い得る限界点と考えると大差ないようである。

そこで、今回は、 $h/l > 0.50$ の深い Scheibe について、その応力現象を見出す目的のため、数種のエポキシ樹脂模型によつて、光弾性実験を行ない、Beam Theory や、三の Scheibe Theory による解析結果とも比較検討した。

2 模型実験とその解析理論

(1) 模型実験

模型材料としては、理研計器 K. K. 製のエポキシ樹脂、厚さ 6 mm 板を用い、図-1 に示すような、1型~7型 ($h/l = 1/2 \sim 2.0$) の Scheibe 模型を入念に製作し、単純支持、中央集中線荷重載荷によつて、光弾性実験を行なった。光弾性実験装置には、理研計器 K. K. 製の標準型光弾性実験装置を用い、エポキシ樹脂の光弾性感度、フリンジ応力の測定には、1型および2型の模型を用いた。測定の結果、フリンジ応力 $S = 1.130 \text{ kg/mm}$ 、光弾性感度 $\alpha = 0.885 \text{ mm/kg}$ であつた。 ($S = (\sigma \cdot d)/N$, $\alpha = 1/S$, $d = \text{厚さ}$)

(2) 解析理論

(a) 実験解析に用いた公式

光弾性実験による等色線縞字真と等傾線図を用い、セン断応力差積分法の応力解析原理に従つて、次式より、 τ_{yx} 、 σ_y 、 σ_x の分布を求めた。

$$\tau_{yx} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta, \quad \sigma_y = (\sigma_y)_0 - \sum \Delta \tau_{yx}, \quad \sigma_x = \sigma_y - (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \quad \text{----- (1)}$$

ここに、 $\sigma_1 - \sigma_2$: 主応力差 $= (S/d)N$ (kg/mm^2)、 S : フリンジ応力 (kg/mm)、 N : 縞次数、 d : 板厚 (mm)、 $(\sigma_y)_0$: $y=0$ の時すなわち上縁の σ_y 、 θ : 荷重線と主応力軸のなす角、 $\Delta \tau_{yx}$: 間隔 Δx はな

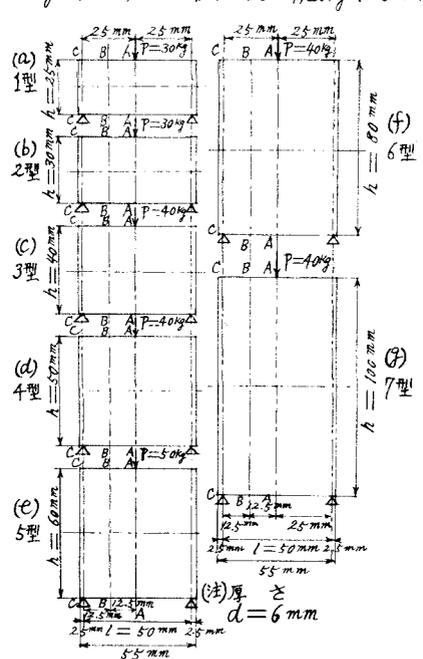


図-1 エポキシ樹脂模型 Scheibe (単純支持) の寸法と載荷、解析断面などの位置図

れた断面の τ_{yx} の差。

(b) 理論解析に用いた解式

1) 等断面単純矩形析に関する M. M. Frocht 氏の理論解式 (原典: 上面中央点)

$$\sigma_y = -\frac{2P}{d} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_x = \frac{2P}{d} \left\{ \frac{3}{h^3} \left(\frac{l}{2} - x \right) \left(y - \frac{h}{2} \right) - \pi \cdot \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \right\}, \quad \tau_{yx} = -\frac{2P}{d} \left\{ \frac{3}{2h^3} (hy - y^2) + \frac{1}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right\}, \quad l = \text{支間長 (mm)}, \quad h = \text{析の高さ (mm)}, \quad d = \text{厚さ (mm)}, \quad x: \text{任意の点の支間中央縦軸線より測つた水平距離 (mm)}, \quad y = \text{任意の点の析上面より測つた垂直距離 (mm)} \quad \text{----- (2)}$$

2) K. Girkmann 氏による山形曲線荷重を有する単純支持の Scheibe 理論解式 (原典: 左支点)

$$\sigma_x = \frac{P_n}{h} \frac{1}{\sinh^2 \alpha_n c - \alpha_n^2 c^2} \left\{ \alpha_n c \sinh \alpha_n c (2 \cosh \alpha_n y + \alpha_n y \sinh \alpha_n y) - (\sinh \alpha_n c + \alpha_n c \cosh \alpha_n c) (\sinh \alpha_n y + \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \right\} \sin \alpha_n x, \quad \sigma_y = -\frac{P_n}{h} \frac{1}{\sinh^2 \alpha_n c - \alpha_n^2 c^2} \left\{ \alpha_n c \sinh \alpha_n c (\alpha_n y \sinh \alpha_n y) + (\sinh \alpha_n c + \alpha_n c \cosh \alpha_n c) (\sinh \alpha_n y - \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \right\} \sin \alpha_n x, \quad \tau_{xy} = -\frac{P_n}{h} \frac{1}{\sinh^2 \alpha_n c - \alpha_n^2 c^2} \left\{ \alpha_n c \sinh \alpha_n c (\sinh \alpha_n y + \alpha_n y \cosh \alpha_n y) - \alpha_n y \sinh \alpha_n y (\sinh \alpha_n c + \alpha_n c \cosh \alpha_n c) \right\} \cos \alpha_n x, \quad l = \text{支間長 (mm)}, \quad c = \text{断面の高さ (mm)}, \quad p(x) = P_n \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l} \quad (p(x) \text{は中央で最大}), \quad h = \text{厚さ (mm)} \quad \text{----- (3)}$$

3) K. Beyer 氏による中央部分荷重を有する単純支持の Scheibe 理論解式 (原典: 中心線上中央点)

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{F_{x1} - 2F_x + F_{x2}}{\Delta x^2}, \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \approx \frac{F_z - 2F_x + F_{z1}}{\Delta z^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \approx -\frac{(F_{xz} - F_{zx}) - (F_{xz} - F_{zx})}{4\Delta x \cdot \Delta z}$$

$F_x =$ 格子座線の交点 x における不静定未知量 (連立方程式を解いて求める) $x =$ Scheibe の中心線を通る座標, $z =$ 原点を通り, x 軸に直角な座標 ----- (4)

4) Timoshenko & Goodier 氏による中央部分荷重を有する単純支持の Scheibe 理論解式 (原典: 底面中央点)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad l \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \bar{X}, \quad m \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - l \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \bar{Y}, \quad \text{----- (5)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 \approx \frac{1}{\Delta x^2} (\phi_1 - 2\phi_0 + \phi_3), \quad \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_1 \approx \frac{1}{\Delta x^2} (\phi_2 - 2\phi_1 + \phi_0), \quad \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_2 \approx \frac{1}{\Delta x^2} (\phi_0 - 2\phi_3 + \phi_7) \quad \text{----- (6)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_1 - 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_2 \right] \approx \frac{1}{\Delta x^2} (6\phi_0 - 4\phi_1 - 4\phi_3 + \phi_7 + \phi_9)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta y^2} (6\phi_0 - 4\phi_2 - 4\phi_4 + \phi_7 + \phi_{11}), \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} [4\phi_0 - 2(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_7) + \phi_6 + \phi_8 + \phi_{10} + \phi_{12}] \quad \text{----- (7)}$$

$$20\phi_0 - 8(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_7) + 2(\phi_6 + \phi_8 + \phi_{10} + \phi_{12}) + \phi_5 + \phi_7 + \phi_9 + \phi_{11} = 0 \quad \text{----- (8)}$$

(8)式は, Scheibe の境界内のどの網目格点においても満足せねばならない。(5)式を積分し, 応力関数 ϕ を求める。 $\phi = x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \int (x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x} + y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial y}) ds \quad \text{----- (9)}$

境界条件を利用し, 網目格点における係数を定め, 連立方程式を解くことにより, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を求めることが出来る。

3 理論値と実験値の比較

各模型について, A-A 断面, B-B 断面, C-C 断面のそれぞれについて, 実験解折値と各理論計算値とを比較吟味した。その結果, 各理論にはそれぞれ, 長所, 短所があり, 実験値とかなり相離れる場合もあれば, 逆に非常に接近する場合もあつた。Scheibe 理論には, 種々仮定が含まれているので, その断面により, どの理論を採用したらよいかを判断しなければならぬ。

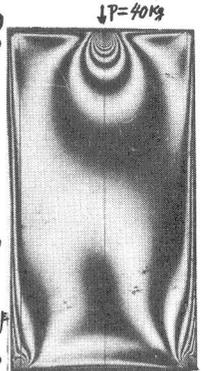
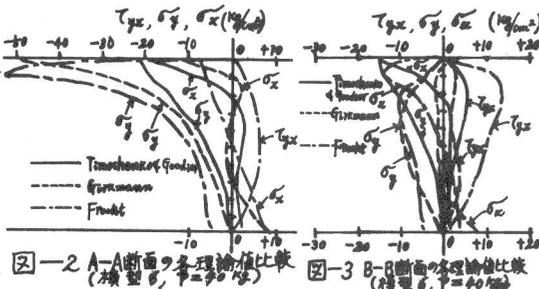


写真-1 模型7の等色線結像

実験解析の結果は、紙面の関係上、模型6と模型2のみに止めたが、傾向は窺えると思う。やはり、断面高さの大きさにより、傾向がかなり違って来ることがあるし、各理論解析値からは、その特徴を窺うことが出来る。

