

九州大学 工学部 正員 山崎徳也

" " " 太田俊昭

" 大学院 学員 〇片山忠

1. 緒言 高張力鋼のめざましい飛躍とともに注目をあびてきた Hybrid 工形ばり¹⁾は、Cost 高の High-Tension Steel を曲げモーメントに最も大きく抵抗するフランジ部分に用い、ウェブ部分には Low-Tension Steel を用いることにより、経済的かつ十分な強度を持たせた効率のよい一種の混成ばりである。本論文は Hybrid 工形断面をセフ連続ばりの弾塑性解析を試み、全断面が Low-Tension Steel よりなる普通工形ばりと比較検討してその特性を説明し、後述することく、Hybrid 工形ばりの特性の一つである断面増強効果について考察したものである。

2. 曲げモーメントと曲率の関係

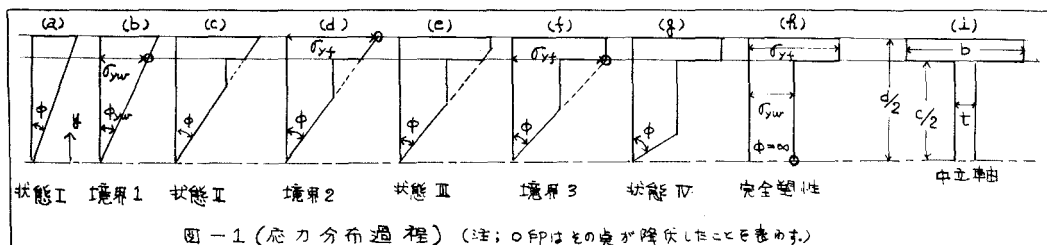


図-1 (応力分布過程) (注: ○印はその点で降伏したことを表す。)

弾塑性解析の慣用仮定にしたがえば、漸増曲げモーメントを受けて弾性より弾塑性を経て完全塑性に至るまでの Hybrid 工形ばりの断面に生じる応力分布過程は図-1のごとく示される。これらの各状態における曲げモーメント M と曲率 ϕ の関係は断面寸法 (b, c, d, t) を図-1(a)のごとく定めればそれぞれ以下のごとくえられる。

$$\text{状態 I (図-1(a)参照)}; \quad M = EI\phi \quad \text{-----(1)}$$

$$\text{状態 II (図-1(c)参照)}; \quad M = EI_f \phi + \sigma_{yw} \cdot Z_w - \frac{\sigma_{yw}^3 \cdot t}{3E^2 \phi^2} \quad \text{-----(2)}$$

$$\text{状態 III (図-1(e)参照)}; \quad M = Z_f \cdot \sigma_{yf} + Z_w \cdot \sigma_{yw} - \frac{\sigma_{yw}^3 \cdot t + \sigma_{yf}^3 \cdot b}{3E^2 \phi^2} + \frac{bc^2}{12} (3\sigma_{yf} - cE\phi) \quad \text{-----(3)}$$

$$\text{状態 IV (図-1(g)参照)}; \quad M = Z_f \cdot \sigma_{yf} + Z_w \cdot \sigma_{yw} - \frac{\sigma_{yw}^3 \cdot t}{3E^2 \phi^2} \quad \text{-----(4)}$$

$$\text{完全塑性状態 (図-1(h)参照)}; \quad M_P = Z_f \cdot \sigma_{yf} + Z_w \cdot \sigma_{yw} \quad \text{-----(5)}$$

ここに σ_{yw}, σ_{yf} : それぞれウェブおよびフランジの降伏応力。 E : ヤング率。

I : 断面二次モーメント。 I_f, Z_f : フランジの断面二次モーメントおよび一次モーメント。 Z_w : ウェブの断面一次モーメント。 M_P : 完全塑性モーメント。

次に図-1(b)の、状態 I と II の境界を示す境界 1 における降伏モーメント M_{yw} 、曲率 ϕ_y を式(1)より次々求める。

$$M_{yw} = EI\phi_y = \sigma_{yw} \cdot S \quad \text{ただし } S = I / \frac{c}{2} \quad \text{-----(6)}$$

さて以後の解析を容易にするために、式(1)~(5)の M - ϕ 関係式を式(6)で除して無次元化すればそれぞれ次式となる。

$$\text{状態 I}; \quad m = \phi \quad \text{-----(7)}$$

$$\text{状態 II}; \quad m = \frac{Z_w}{S} + \frac{I_f}{I} \cdot \phi - \frac{Z_w}{3S} \cdot \frac{1}{\phi^2} \quad \text{-----(8)}$$

状態Ⅲ;
$$m = \frac{Z_w + Z_t \cdot R + Z_a \cdot R}{S} - \frac{2 Z_a}{3 S} \cdot \varphi - \frac{Z_w + Z_a \cdot R^2}{3 S} \cdot \frac{1}{\varphi^2} \quad \text{--- (9)}$$

状態Ⅳ;
$$m = \frac{Z_w + Z_t \cdot R}{S} - \frac{Z_w}{3 S} \cdot \frac{1}{\varphi^2} \quad \text{--- (10)}$$

完全塑性状態;
$$m_E = \frac{Z_w + Z_t \cdot R}{S} \quad \text{--- (11)}$$

ただし、 $m = M/M_{yw}$, $\varphi = \phi/\phi_{yw}$, $Z_a = bc^2/4$,

$R = \sigma_{ys}/\sigma_{yw}$ を降伏比と名付ける。

いま、断面寸法を $b = 15 \text{ cm}$, $c = 27.4 \text{ cm}$, $d = 15 \text{ cm}$, $t = 0.8 \text{ cm}$ とし、 R が 1.5, 2.0, 3.0 の各場合について式(9)~(11)より m - φ 図を描けば、図-2 に示すごとくえられる。

3. m - φ 近似直線に基づく中-法³⁾公式の誘導

図-3 に示す m - φ 近似直線 BC の勾配 κ' を文献(3)の手法に準じてエネルギー等置の条件より算定する。すなわち図-3 において m - φ 曲線とよる面積 $ABGCD$ と m - φ 近似直線による面積 $ABCD$ とを等置して次式をうる。

$$\kappa' = \frac{\frac{1}{2} - \frac{Z_t \cdot R}{S} + \frac{Z_a \cdot R^2}{S} \left(\frac{d}{c} - 1 \right)}{\frac{1}{2} (m_E - 1)^2} \quad \text{--- (12)}$$

次に直線部材 AB の材端 A より距離 η の任意点のねじり角 θ を、おき、ねじり角 θ は中-法によれば、とれとれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \eta \cdot \theta_{AB} - \int_0^\eta \phi(\eta - x) dx \\ \theta &= \theta_{AB} - \int_0^\eta \phi dx \\ \theta_{AB} &= \int_0^l \frac{l-x}{l} \phi dx \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (13)}$$

ただし l : 部材長。

一方、 m - φ 近似直線の方程式は $\varphi = \kappa' m - (\kappa' - 1)$ と表わされる³⁾ゆえ、式(13)にこれを代入のうえ整理すれば結局次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{M_{yw} \cdot l^2}{EI} \left[\bar{\eta} \bar{\theta}_{AB} - \int_0^{\bar{\eta}} m(\bar{\eta} - \bar{x}) d\bar{x} - \kappa \int_P \{m - \text{sig } m\} (\bar{\eta} - \bar{x}) d\bar{x} \right] \\ \theta &= \frac{M_{yw} \cdot l}{EI} \left[\bar{\theta}_{AB} - \int_0^{\bar{\eta}} m d\bar{x} - \kappa \int_P \{m - \text{sig } m\} d\bar{x} \right] \\ \bar{\theta}_{AB} &= \left[\int_0^1 m(1 - \bar{x}) d\bar{x} + \kappa \int_P \{m - \text{sig } m\} (1 - \bar{x}) d\bar{x} \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (14)}$$

ここに $\bar{x} = x/l$, $\bar{\eta} = \eta/l$, $\bar{\theta}_{AB} = \theta_{AB} / \frac{M_{yw} \cdot l}{EI}$, $\kappa = \kappa' - 1$,

$\text{sig } m = +1$ ($m > 0$), $\text{sig } m = -1$ ($m < 0$), また積分記号の添字 P は材端方向の塑性域を意味。

4. 計算例 上記中-法公式を用いて、図-4 に示す Hybrid 連続ばりを解析し、変位 D のねじり角を求めれば以下のごとくである。まず弾性計算により降伏荷重 E_y を求めれば次値をうる。

$$E_y = 64 M_{yw} / 11 l \quad \text{--- (15)}$$

次に各部材に作用するモーメントを図-4より求め、式(15)の E_y および M_{yw} で無次元化すれば次式をうる。

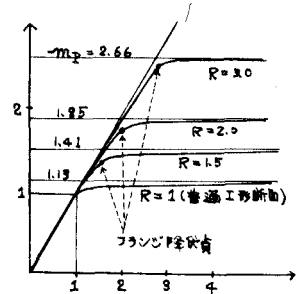


図-2. (m - φ 曲線)

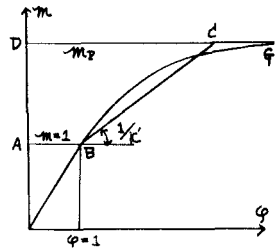


図-3 (m - φ 近似直線)

$$\left. \begin{aligned} A \sim D; \quad M &= \left(\frac{32}{11} P^* - M_{BA} \right) \bar{x} \\ D \sim B; \quad M &= - \left(\frac{32}{11} P^* + M_{BA} \right) \bar{x} + \frac{32}{11} P^* \\ B \sim c; \quad M &= \frac{32}{11} P^* \bar{x} - \frac{32}{11} P^* \bar{x}^2 + (1 - \bar{x}) M_{BC} \end{aligned} \right\} \quad \dots (16)$$

ここに $P^* = P/E_y$, M_{BA}, M_{BC} : それぞれ部材

AB, BCの材端Bの端モーメントを M_{yw} で割ったものである。

部材ABおよびBCの各材端Bのたわみ角 θ_{BA}, θ_{BC} を式(14)の

を2式より求め、支点Bのたわみ角の連続条件 $\theta_{BA} = \theta_{BC}$ を用いれば結局不静定モーメント M_{BA} が次のごとく求められる。

$$M_{BA} = \left[\frac{10}{11} P^* + \frac{3}{2} K (-I_1 + I_2) \right] / \left[1 - \frac{3}{2} K (-I'_1 + I'_2) \right] \quad \dots (17)$$

$$\text{ただし } I_1 = \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\bar{a}_1^2 - \bar{a}_2^2 - \bar{a}_3^2) \right\} + \left\{ -\frac{16}{11} - \frac{16}{11} (\bar{a}_2^2 - \bar{a}_3^2) + \frac{32}{33} (\bar{a}_1^3 + \bar{a}_2^3 - \bar{a}_3^3) \right\} P^*,$$

$$I_2 = \left\{ \bar{b}_1 \bar{b}_2 - \bar{b}_3 - \frac{1}{2} (\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2 - \bar{b}_3^2) \right\} + \left\{ \frac{16}{11} (\bar{b}_1^2 - \bar{b}_2^2 + \bar{b}_3^2) - \frac{16}{33} (\bar{b}_1^3 - \bar{b}_2^3 + \bar{b}_3^3) + \frac{16}{22} (\bar{b}_1^4 - \bar{b}_2^4 + \bar{b}_3^4) \right\} P^*,$$

$$I'_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} (\bar{a}_1^3 - \bar{a}_2^3 + \bar{a}_3^3), \quad I'_2 = (\bar{b}_1 - \bar{b}_2 + \bar{b}_3) - (\bar{b}_1^2 - \bar{b}_2^2 + \bar{b}_3^2) + \frac{1}{3} (\bar{b}_1^3 - \bar{b}_2^3 + \bar{b}_3^3),$$

$$\text{ここに } \bar{a}_\lambda = a_\lambda / l, \quad \bar{b}_\lambda = b_\lambda / l \quad (\lambda = 1, 2, 3).$$

一方、材端Aのたわみ角 θ_{AB} および荷重点Dのたわみ δ は式(14)よりそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{AB} &= \left(\frac{4}{11} P^* - \frac{1}{2} M_{BA} \right) + K (I_1 + I'_1 M_{BA} + J_1) \\ \delta &= \frac{M_{yw} l^2}{EI} \left[\frac{1}{2} \theta_{AB} - \left\{ \frac{1}{48} \left(\frac{32}{11} P^* - M_{BA} \right) + K J_2 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots (18)$$

$$\text{ここに } J_1 = \left\{ 1 + (\bar{a}_1 - \bar{a}_2 - \bar{a}_3) \right\} + \left\{ \frac{18}{11} - \frac{16}{11} (\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2 - \bar{a}_3^2) + \frac{32}{11} (\bar{a}_2 - \bar{a}_3) \right\} P^* + \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\bar{a}_1^2 - \bar{a}_2^2 + \bar{a}_3^2) \right\} M_{BA},$$

$$J_2 = \left(\frac{32}{11} P^* - M_{BA} \right) \left\{ \frac{1}{48} + \frac{\bar{a}_1^2}{3} \right\} + \left\{ -\frac{1}{8} - \frac{\bar{a}_1^2}{2} + \frac{\bar{a}_1}{2} \right\}.$$

以上より式(17)によって不静定モーメント M_{BA} を求め、これを式(18)に代入して所要のたわみ δ を算定することが出来る。この場合、塑性領域と規定するパラメータ $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \dots$ は、モーメントの適合条件より逐次計算によって算定する。本例では塑性ヒンジがまず荷重点Dに、ついで支点Bに生じて部材ABの部分崩壊が形成される。弾性状態より部材ABの崩壊までの漸増荷重に対するたわみ δ が1.5, 2.0, 3.0の各場合について算定し、結果を図-5に示した。

5. Hybrid工形ばりの特性について

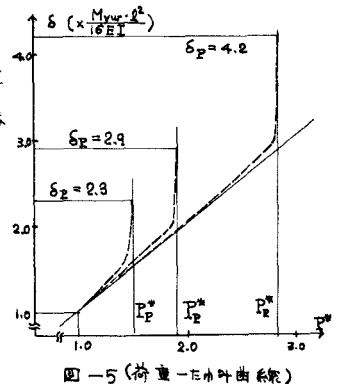
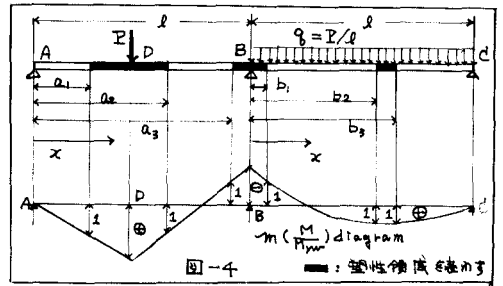
降伏比 R と降伏荷重 P_y , 崩壊荷重 P_u , 降伏荷重時のたわみ δ_y , 崩壊荷重時のたわみ δ_p の関係も前記計算例について考察し、普通工形ばりと比較吟味した。すなわち Hybrid工形ばり、普通工形ばりの荷重値 P に対する δ を $\bar{P}, \bar{\delta}$ で区別し、さらに両者の荷重およびたわみの比を $\bar{P} = P/P_y$ および $\bar{\delta} = \delta/\delta_y$ とすれば、それぞれ次のごとき関係式が成立する。

まず降伏荷重については式(15)より次式となる。

$$P_y = 64 M_{yw} / 11 l, \quad \delta_y = 64 M_{ys} / 11 l \quad \therefore \bar{P}_y = P_y / \bar{P} = \frac{1}{2} \quad \dots (19)$$

ただし M_{ys} : 普通工形ばりの降伏モーメント。

また、崩壊荷重は $P_u^* = 3.3 M_{ys} / 8 l$ となるので次式が成立する。



$$P_P = P_Y \cdot P_P^* = P_Y \cdot \frac{33}{32} m_P, \quad \bar{P}_P = \bar{P}_Y \cdot \frac{33}{32} m_P, \quad \therefore \bar{P}_P = P_P / \bar{P}_Y = \frac{33}{32} + R \cdot \frac{33}{32} \quad \text{--- (20)}$$

$$\text{ただし、} \bar{Z} = \bar{Z}_W + \bar{Z}_T.$$

次に降伏荷重時のためは式(19)においてこの項を零とあければ結局、次式となる。

$$\bar{\delta}_Y = \delta_Y / \delta_P = d/c \quad \text{--- (21)}$$

よって崩壊荷重時のためは $I^* = \frac{33}{32} m_P$, $M_{BA} = M_P$ を式(18)に代入して整理すれば次値をうる。

$$\bar{\delta}_P = \frac{\delta_P}{\delta_P} = \frac{d}{c} \left[m_P + R \left\{ m_P - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{m_P} \right\} \right] / \left[m_P + R \left\{ m_P - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{m_P} \right\} \right] \quad \text{--- (22)}$$

ただし、 $1/(R+1)$: 普通工形ばりの $M-P$ 近似直線系の勾配。

式(19)~(22)を図示すれば図-6のごとくなる。

なお、部材 AB, BC が同時に崩壊するためには、部材 BC に比べて R 値の大きな Hybrid 工形ばりを部材 AB に用いねばよく、この場合の両部材の R の関係式は、部材 BC の最大モーメントに対する部材 AB の最大モーメントの比がそれぞれ R の函数である $(M_P)_{AB} / (M_P)_{BC}$ に等しいとさう次の式(23)より一義的に定められる。

$$\frac{(M_P)_{AB}}{(M_P)_{BC}} = \frac{(1+VZ)}{1} \quad \text{--- (23)}$$

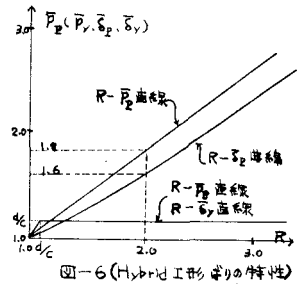


図-6 (Hybrid 工形ばりの特性)

いま部材 BC に $R=1$ の普通工形ばりを用いるものとするが式(23)より、部材 AB の R 値として $R=2.46$ とえ、したがって同部材に $R=2.46$ の Hybrid 工形ばりを用いねば、両部材ともに普通工形ばりを用いた場合に比べて約 99% 大きい荷重で完全崩壊することが計算の結果判明し、かかる断面強度効果は Hybrid 工形ばりの重要な特性の一つと云える。さて図-2 の $M-P$ 曲線、図-5 の荷重-たわみ曲線、および図-6 の特性図を統合して論ずれば、以下の諸点を Hybrid 工形ばりの特徴としてあげることができる。

- (i) 図-2 の $M-P$ 曲線よりみれば、Hybrid 工形ばりは必ず降伏後も弾性挙動を示し、フランジ外縁の降伏とともに曲げ剛性を弱めて塑性特性を顕著に表わし、フランジの降伏が終了するとともに急速に完全塑性状態に移行する。この傾向は R が大なるほど著しくなる。
- (ii) 図-5 より、たわみは最初の塑性ヒンジ形成時まではほぼ直線的に増大し、それ以後急増することが判明される。
- (iii) 図-6 より降伏荷重時の $\bar{P}_Y, \bar{\delta}_Y$ は R が d/c より小なる部分を除けば d/c となり、R の変化に無関係であるのに対し、崩壊荷重時の $\bar{P}_P, \bar{\delta}_P$ は両者ともほぼ直線的に増大する。

6. 結語

本論文は Hybrid 工形断面をもつ連続ばりの弾塑性解析を行い、その特性を理論的に考察したもので、5. を指摘したごとく Hybrid 工形ばりは、R 値の増加とともに弾性的挙動を著しく増大する。しかしウェブの常時降伏に伴う高応力疲労や局部塑性座屈などの諸現象が大なる問題として介在するゆえ、必ずしも慣用の塑性設計法が R の大なる Hybrid 工形ばりの解析に最適であると判断するのは極めて危険と云える。本研究は文部省科学研究費の補助を受けた、記して謝意を表す。

参考文献 (1) R.W. Frost & C.A. Schelling; Behavior of Hybrid Beam subjected to Static Load, Proceeding of ASCE, vol. 90 NO. 873, June 1964

(2) 山崎・畑田・山崎; Hybrid 工形ばりの弾塑性解析, 土木学会西部支部研究発表会論文集, 昭和 42 年 1 月。

(3) 山崎・畑田・山崎; 補正 I 形ばりによる直線材の弾塑性解析, 土木学会論文集, 第 134 号, 昭和 41 年 10 月。