

九州大学工学部 正員 山崎徳也
 " 大学院 学生員 石川信隆
 " " " 〇黒木健実

1. 序言

さきに著者は衝撃荷重を受ける片持ばりをモデル化して弾塑性挙動^{(1),(2)}を解析⁽³⁾を行い、その結果が予田氏⁽⁴⁾の算定結果とほぼ合致することを立証しえたが、本論文は動的横荷重を受ける場合の弾塑性挙動を解明すべく、前報と同様に図-1に示すごとく理想化した曲げモーメント-曲率関係を⁽⁵⁾用い、図-2(a)の片持ばりを同図(b)に示すごとく有限個の集中質量と、両端に曲げモーメントのみを伝える moment spring をもつ剛体とにより形成されるモデルに置き換え、かかるモデルに動的横荷重が作用するとき生ずる運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーに Lagrange の運動方程式を適用して弾性および塑性時の運動方程式を導き、これに階差法を用いて弾塑性時の応力および変形を求めんとするものである。

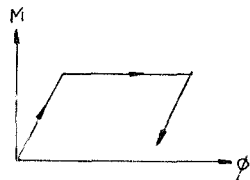


図-1

2. 弾性時算定式

(1) 運動方程式の誘導

まず図-2(a)の片持ばりを n 等分し

て同図(b)のモデルに置換すれば、各点の集中質量および曲げモーメントは次式で表わされる。

$$\bar{m}_0 = \frac{1}{2} m h, \quad \bar{m}_i = m h \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad \bar{m}_n = \frac{1}{2} m h \quad \dots (1) \quad M_i = K \bar{\theta}_i \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \quad \dots (2)$$

ただし m : 片持ばりの単位長さ当りの質量, h : 集中質量間の距離, $K (=EI/h)$: 回転剛度,

EI : 片持ばりの曲げ剛性, $\bar{\theta}_i$: i 点の回転角

いま動的横荷重 $g(t)$ 載荷後 t 時刻にモデルの任意連続点 $(i-1, i, i+1)$ が図-3のごとく変形して釣合状態にあるものとすれば、質量 $\bar{m}_i$ をもつ i 点の運動エネルギー T_i およびポテンシャルエネルギー V_i は式(2)および図-3よりそれぞれ次のごとく求められる。

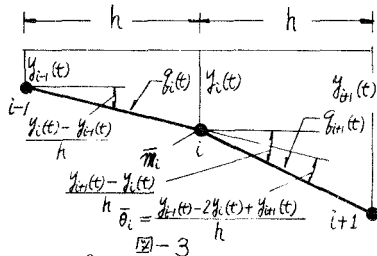


図-3

$$T_i = \frac{1}{2} \bar{m}_i \{\dot{y}_i(t)\}^2, \quad V_i = \frac{1}{2} M_i \bar{\theta}_i = \frac{1}{2} K \bar{\theta}_i^2 = \frac{1}{2} K \left\{ \frac{y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t)}{h} \right\}^2 \quad \dots (3)$$

$$\bar{\theta}_i = \{y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t)\} / h, \quad \dot{y}_i(t) = d y_i(t) / dt$$

よって式(3)よりモデル全体の運動エネルギー T およびポテンシャルエネルギー V は次式でえられることとなる。

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \bar{m}_i \{\dot{y}_i(t)\}^2, \quad V = \sum_{i=0}^{n-1} V_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} K \left\{ \frac{y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t)}{h} \right\}^2 \quad \dots (4)$$

一方 Lagrange の運動方程式は一般力を Q_i とすれば次のごとく表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{y}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial y_i} (V_{i-1} + V_i + V_{i+1}) = Q_i \quad \dots (5)$$

式(5)に式(4)を代入して整理すれば次式の結果をうる。

る $\phi_c^p(t+\Delta t)$ は次式で与えられる。

$$\phi_c^p(t+\Delta t) = \phi_c^p(t) + \Delta \phi_c^p(t) \quad (12)$$

次に i 点の *moment spring* を弾性体と仮定して曲率 $\phi_i + \phi_c^p(t)$ および $\phi_i + \phi_c^p(t+\Delta t)$ に対応する曲げモーメント (以後仮想弾性曲げモーメントと呼ぶ) をそれぞれ $\bar{M}_i(t)$, $\bar{M}_i(t+\Delta t)$ とすれば, 図-4の幾何学的関係より曲率と仮想弾性曲げモーメントとの間には次の関係が成立する。

$$\frac{M_p}{\phi_p} = \frac{\bar{M}_i(t+\Delta t) - \bar{M}_i(t)}{\Delta \phi_c^p(t)} = EI = Kh \quad \text{ただし } \bar{M}_i(t+\Delta t) > \bar{M}_i(t) \geq M_p = M_i(t+\Delta t)$$

上式に $\bar{M}_i(t) = M_p + Kh\phi_c^p(t)$ を代入のうえ $\Delta \phi_c^p(t)$ について整理すれば

$$\Delta \phi_c^p(t) = \frac{1}{Kh} \{ \bar{M}_i(t+\Delta t) - Kh\phi_c^p(t) - M_p \} \quad \text{ただし } \bar{M}_i(t+\Delta t) > \bar{M}_i(t) \geq M_p = M_i(t+\Delta t) \quad (13)$$

一方式(2)と $\bar{M}_i = EI(\phi_i + \phi_c^p)$ を用いて ϕ_c^p および $\Delta \phi_c^p$ を求めれば次の式(14)をうる。

$$\phi_c^p = \frac{\theta_c^p}{h} \quad \Delta \phi_c^p = \frac{\Delta \theta_c^p}{h} \quad (14)$$

よって式(14)を式(13)および式(12)に代入すれば所要の曲げモーメント $M_i(t+\Delta t)$, 塑性回転角 $\theta_c^p(t+\Delta t)$ および塑性回転角の増加 $\Delta \theta_c^p(t)$ がえられる次式となる。

$$\bar{M}_i(t+\Delta t) > \bar{M}_i(t); \quad M_i(t+\Delta t) = M_p, \quad \Delta \theta_c^p(t) = \frac{1}{K} \{ \bar{M}_i(t+\Delta t) - K\theta_c^p(t) - M_p \}, \quad \theta_c^p(t+\Delta t) = \theta_c^p(t) + \Delta \theta_c^p(t) \quad (15)$$

ただし $\bar{M}_i(t)$ および $\bar{M}_i(t+\Delta t)$ の算出は式(10)に準ずる。

さらに時刻 t_1 において i 点が再び弾性状態に移行し始め, 時刻 $t(>t_1)$ には $M-\phi$ 関係が図-5に示すごとく $BC \parallel OA$ を満足して C 点に至るものとすれば, このときの i 点のポテンシャルエネルギー V_i は斜線の部分に h を乗じて表わされ次式となる。

$$V_i = \frac{h}{2} \left\{ \frac{\bar{\theta}_i(t)}{h} - \frac{\theta_c^p(t)}{h} \right\} \{ \bar{M}_i(t) - K\theta_c^p(t) \}$$

よって上式に式(2)および式(3)の $\bar{\theta}_i$ を代入して $\partial V_i / \partial y_i$ を求めれば $\partial V_i / \partial y_i = -(2/h) M_i(t)$ をえ, また一般力は $Q_i = (h/2) \{ \bar{\theta}_i(t) + \theta_{c1}(t) \}$ となるゆえ, これらを式(5)に代入すればこのときの運動方程式が式(7)と一致し, 結局左わみは式(9)の表現に合致する。

また図-5より曲げモーメント $M_i(t+\Delta t)$, 塑性回転角 $\theta_c^p(t+\Delta t)$ は次のごとく求められる。

$$\bar{M}_i(t+\Delta t) < \bar{M}_i(t); \quad M_i(t+\Delta t) = \bar{M}_i(t+\Delta t) - K\theta_c^p(t), \quad \theta_c^p(t+\Delta t) = \theta_c^p(t) \quad (16)$$

以上の諸式より塑性時および塑性状態から再び弾性状態に移行するときのたわみ, 曲げモーメントおよび塑性回転角を算定する手法を大略すれば結局次のごとくなる。

(i) まず時刻 t_1 において2.で計算した弾性曲げモーメント $M_i(t_1)$ が M_p に達したものとすれば, $M_i(t_1) = M_p$ において式(9)より時刻 $t_1+\Delta t$ におけるたわみ $y_i(t_1+\Delta t)$ および式(10)より仮想弾性曲げモーメント $\bar{M}_i(t_1+\Delta t)$ を算出する。

(ii) 次に $\bar{M}_i(t_1+\Delta t)$ と $\bar{M}_i(t_1)$ とを比較判別して式(15)または式(16)より $M_i(t_1+\Delta t)$, $\Delta \theta_c^p(t_1)$ および $\theta_c^p(t_1+\Delta t)$ を求める。ただし時刻 t_1 まで i 点の塑性回転角は生じていないゆえ $\theta_c^p(t_1) = 0$ とおく。

以下時刻 $t_1+2\Delta t$, $t_1+3\Delta t, \dots$ におけるたわみ, 曲げモーメントおよび塑性回転角が逐次式(9), 式(10)および式(15), 式(16)を繰り返して用いることにより算出されることとなる。

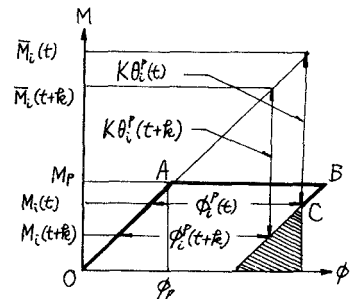


図-5

4. 数値計算例

図-6(a)のごとく長さ220 mmの10 mm角軟鋼圧延材を用いた片持ばりに次式に示るとき等分布荷重を作用させて動的解析を行い、結果の一部を図-7および図-8に示した。すなわち

$$f(t) = \pi P_0 e^{-t/\tau}$$

ここに P_0 : 片持ばりの固定端に静的塑性曲げモーメントを生じさせるに必要な等分布荷重, n : 正の整数, $\tau = T/2$, T : 片持ばりの基本周期

図-7は動的塑性曲げモーメント M_p を静的塑性曲げモーメント $M_0 (= 2500 \text{ kg}\cdot\text{cm})$ に一致させ, n を1から4まで増加させた場合の自由端のたわみ-時間曲線を示したもので, $n=1$ のとき時刻 $t = 2.9 \times 10^{-3} \text{ sec}$ においてたわみは最大値3.1 cmとなり以後減少して永久変形のみを残すが, $n=2, 3, 4$ の場合にはたわみは急速に増加し崩壊に至る傾向を示している。

図-8は固定端の曲げモーメントと時間 t との関係を示したもので, $n=1$ のときは $n=2, 3, 4$ のときよりも M_p 値に達するが遅く, $t = 3.2 \times 10^{-3} \text{ sec}$ において再び弾性状態に戻る挙動が示されたが, $n=2, 3, 4$ と n が大きくなるに従い降下になる時刻が早くなりいずれも図示した $4.0 \times 10^{-3} \text{ sec}$ の間には弾性状態には戻らないことが認められた。

5. 結語

本法によれば動的荷重 $f(t)$ を単に時間のみの関数として一般表示しているゆえ, 4. で用いた指数関数型荷重以外の任意の荷重形態でも解析することができ, さらに固定ばりおよび連続ばりなどの不静定ばりに対する解析も境界条件を考慮するのみで可能となるが, これらについては後日発表の予定である。

本研究には文部省科学研究費の補助をうけた。記して謝意を表する。

参考文献

- (1) M.L. Baron, H.H. Blüch and P. Weidlinger: Dynamic Elastic-Plastic Analysis of Structures, Trans. of the A.S.C.E., 1962, Vol. 127
- (2) 山田 樗尾: 動的解析における桁のモデル化に関する研究, 第21回土木学会年次学術講演会講演概要第1部, 昭和41年5月
- (3) 山崎 石川 黒木: 衝撃荷重をうける片持ばりの弾塑性解析, 昭和44年度土木学会西部支部研究発表会論文集, 昭和42年1月
- (4) 千田 幸用: 片持ばりの衝撃塑性曲げの研究, 日本機械学会論文集, 第31巻第225号, 昭和40年5月

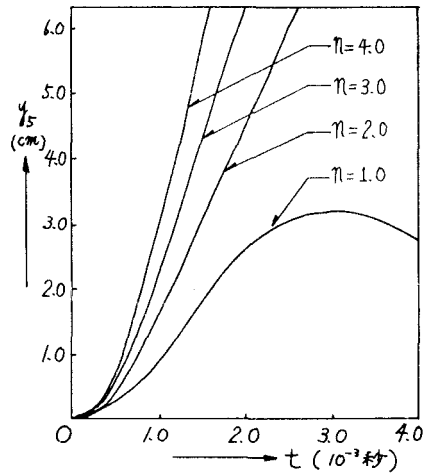
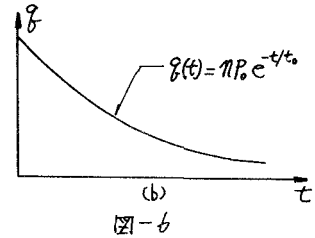
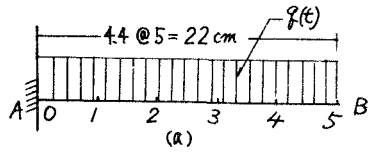


図-7 自由端のたわみ y_s

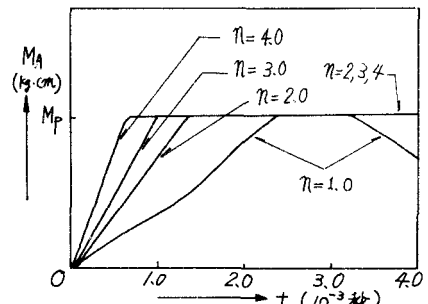


図-8 固定端の曲げモーメント M_A