

九州大学 工学部 正員 山崎徳也

" 大学院 学生員 石川信隆

" " " " 松隈秀信

1. 緒言 RC(鉄筋コンクリート)構造物が低応力を受けている間は弾性体と考えて差し支えないが、一旦高応力を受けて局所的にき裂を生ずるともはや弾塑性体と見做され、その厳密解析は極めて複雑なものとなる。本研究はRC部材の近似的な曲げモーメントと曲率との関係に基づき、局所的にき裂が生じた弾塑性部材に対する変断面たわみ角式を導き、これを用いて実際のRC構造物として採用されるハンチを有する連続(はり)または(はり)と柱との接合部にハンチをもつラーメンなどの弾塑性解析を弾性解析におけるたわみ角法に準ずる手法で行なうのごとくし、その実用化に資せんとするものである。

2. 曲げモーメントと曲率との関係

鉄筋およびコンクリートの応力-歪曲線を図-1のごとく仮定すれば、RC部材の曲げモーメント M と曲率 ϕ との関係は近似的に図-2のごとく示される。よって曲率 ϕ は弾性および弾塑性状態に応じてそれぞれ次の式のごとく表わされる。

$$0 \leq M \leq M_c : \phi = M/EI \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$M_c \leq M \leq M_y : \phi = (M - M_c)/EI_c + M_c/EI = K(M - M_c)/EI + M_c/EI \quad \dots\dots\dots (2)$$

$M = M_y : \phi = \phi_y$ ただし M_c : き裂発生時の曲げモーメント, M_y, ϕ_y : 鉄筋降伏時の曲げモーメントおよび曲率, EI, EI_c : 弾性および弾塑性の曲げ剛性, $K = EI/EI_c$.

ここで図-3のごとき複鉄筋矩形断面を考えれば文献(1)より次値がえられる。

$$EI = 17.5 \times 10^5 \{1 + (0.15 + 0.28)p\} b h^3$$

$$EI_y = (0.15 + 0.3p)EI$$

$$M_c = (4.2 + 3.7p) b h^2$$

$$M_y = j \cdot p \cdot \sigma_{sy} \cdot b h^2$$

ただし $p = A_s/bd$: 引張鉄筋比(%), $r = A'_s/A_s$: 複筋比, b : 幅, h : 高さ, d : 有効高さ, A_s, A'_s : 引張および圧縮鉄筋断面積, σ_{sy} : 降伏応力, j : 降伏応力曲率, $j = 2.55 - 0.16(p - 0.20)$: 応力中心距離比, σ_{sy} : 引張鉄筋降伏応力

よって式(3)よりき裂発生時の曲率 $\phi_c = M_c/EI$ および鉄筋降伏時の曲率 $\phi_y = M_y/EI_y$ がえられ、これを用いて $EI_c = (M_y - M_c)/(\phi_y - \phi_c)$ が求められ式(2)に含まれる $K = EI/EI_c$ が算出されることになる。

3. ハンチを有する部材の弾塑性たわみ角式の誘導

図-4に示すごとく両端ACおよびDBはハンチを有し、かつ塑性領域がEF, GH, IJの範囲にそれぞれ生ずる弾塑性部材ABを考えれば、ハンチ部ACおよびDBにおける曲げモーメント曲率関係式は式(1)および式(2)のIを等断面部の I_0 に置換することにより M を $\bar{M}$, M_c を $\bar{M}_c$ に変換した式内容と一致する。

$$\text{ここで } \bar{M} = M/b \quad \dots\dots\dots (4) \quad \bar{M}_c = M_c/b \quad \dots\dots\dots (5)$$

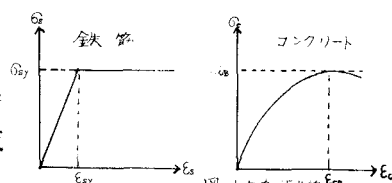


図-1 応力-歪曲線

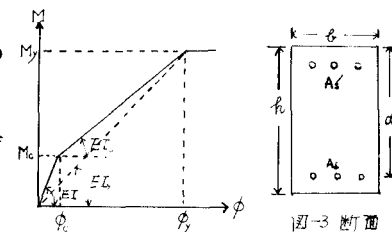


図-3 断面

図-2 M-phi関係

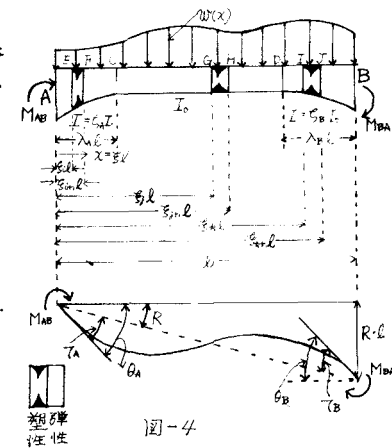


図-4

ただし $\zeta = l/l_0$, $\eta = \sqrt{l/l_0}$, M_{co} :等断面部のき裂発生時の曲げモーメント
よ、任意長の曲げモーメントは式(4)および図-4を参照して次式のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \zeta \leq \lambda_A : \bar{M} &= \{(1-\zeta)M_{AB} - \zeta M_{BA} + M_0(\zeta)\}/\zeta_A \\ \lambda_A \leq \zeta \leq 1-\lambda_B : \bar{M} &= (1-\zeta)M_{AB} - \zeta M_{BA} + M_0(\zeta) \\ 1-\lambda_B \leq \zeta \leq 1 : \bar{M} &= \{(1-\zeta)M_{AB} - \zeta M_{BA} + M_0(\zeta)\}/\zeta_B \end{aligned} \right\} (6)$$

ただし $\zeta = x/l$, $\lambda_A l, \lambda_B l$: A, B 両端よりのハンナリ長さ, また $M_0(\zeta)$ は AB 材を単純ばりと見做したときの荷重による任意長の曲げモーメントを示す。

一方 ϕ -法公式を用うれば両端 A, B における切線角 τ_A および τ_B は次式のごとく表わされる。

$$\tau_A = \int_0^1 \phi \cdot (1-\zeta) \cdot l \, d\zeta, \quad \tau_B = \int_0^1 \phi \cdot (-\zeta) \cdot l \, d\zeta \quad \text{-----} (7)$$

上式の ϕ に等断面部およびハンナリ部において弾性領域ではそれぞれ式(1)および式(4)を弾塑性領域ではそれぞれ式(3)および式(5)を代入のうへ、式(6)を併用して演算整理すれば上式より次の結果がえられる。

$$\left. \begin{aligned} (EI_0/l) \tau_A &= \partial_A M_{AB} - \beta_A M_{BA} - \gamma_{Ai} M_{coi} - \gamma_{Aj} M_{coj} - \gamma_{Ak} M_{con} + \tau_{A0} \\ (EI_0/l) \tau_B &= -\beta_B M_{AB} + \partial_B M_{BA} + \gamma_{Bi} M_{coi} + \gamma_{Bj} M_{coj} + \gamma_{Bk} M_{con} - \tau_{B0} \end{aligned} \right\} (8)$$

ただし式(8)の係数 $\partial_A, \partial_B, \beta_A, \beta_B$, 弾塑性項の一種 $\gamma_{Ai}, \dots, \gamma_{Bk}$ および荷重項の一種 τ_{A0}, τ_{B0} はそれぞれ表-1のごとき内容となる。

表-1

$$\begin{aligned} \partial_A &= \int_0^{\lambda_A} \frac{(1-\zeta)^2}{\zeta_A} d\zeta + \int_{\lambda_A}^{1-\lambda_B} (1-\zeta)^2 d\zeta + \int_{1-\lambda_B}^1 \frac{(1-\zeta)^2}{\zeta_B} d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_i}^{\zeta_{in}} \frac{(1-\zeta)^2}{\zeta_A} d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_j}^{\zeta_{in}} (1-\zeta)^2 d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{in}} \frac{(1-\zeta)^2}{\zeta_B} d\zeta \\ \partial_B &= \int_0^{\lambda_A} \frac{\zeta^2}{\zeta_A} d\zeta + \int_{\lambda_A}^{1-\lambda_B} \zeta^2 d\zeta + \int_{1-\lambda_B}^1 \frac{\zeta^2}{\zeta_B} d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_i}^{\zeta_{in}} \frac{\zeta^2}{\zeta_A} d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_j}^{\zeta_{in}} \zeta^2 d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{in}} \frac{\zeta^2}{\zeta_B} d\zeta \\ \beta_A = \beta_B &= \int_0^{\lambda_A} \frac{\lambda \zeta (1-\zeta)}{\zeta_A} d\zeta + \int_{\lambda_A}^{1-\lambda_B} \zeta (1-\zeta) d\zeta + \int_{1-\lambda_B}^1 \frac{\zeta (1-\zeta)}{\zeta_B} d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_i}^{\zeta_{in}} \frac{\lambda \zeta (1-\zeta)}{\zeta_A} d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_j}^{\zeta_{in}} \zeta (1-\zeta) d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{in}} \frac{\lambda \zeta (1-\zeta)}{\zeta_B} d\zeta \\ \gamma_{Ai} = (\kappa-1) \int_{\zeta_i}^{\zeta_{in}} \frac{\lambda \zeta}{\zeta_A} d\zeta, \quad \gamma_{Aj} &= (\kappa-1) \int_{\zeta_j}^{\zeta_{in}} (1-\zeta) d\zeta, \quad \gamma_{Ak} = (\kappa-1) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{in}} \frac{\lambda \zeta}{\zeta_B} d\zeta, \quad \gamma_{Bi} = (\kappa-1) \int_{\zeta_i}^{\zeta_{in}} \frac{\lambda \zeta}{\zeta_A} d\zeta, \quad \gamma_{Bj} = (\kappa-1) \int_{\zeta_j}^{\zeta_{in}} \zeta d\zeta, \quad \gamma_{Bk} = (\kappa-1) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{in}} \frac{\lambda \zeta}{\zeta_B} d\zeta \\ \tau_{A0} &= \int_0^{\lambda_A} \frac{1-\zeta}{\zeta_A} M_0 d\zeta + \int_{\lambda_A}^{1-\lambda_B} (1-\zeta) M_0 d\zeta + \int_{1-\lambda_B}^1 \frac{1-\zeta}{\zeta_B} M_0 d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_i}^{\zeta_{in}} \frac{1-\zeta}{\zeta_A} M_0 d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_j}^{\zeta_{in}} (1-\zeta) M_0 d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{in}} \frac{1-\zeta}{\zeta_B} M_0 d\zeta \\ \tau_{B0} &= \int_0^{\lambda_A} \frac{\zeta}{\zeta_A} M_0 d\zeta + \int_{\lambda_A}^{1-\lambda_B} \zeta M_0 d\zeta + \int_{1-\lambda_B}^1 \frac{\zeta}{\zeta_B} M_0 d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_i}^{\zeta_{in}} \frac{\zeta}{\zeta_A} M_0 d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_j}^{\zeta_{in}} \zeta M_0 d\zeta + (\kappa-1) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{in}} \frac{\zeta}{\zeta_B} M_0 d\zeta \end{aligned}$$

表-1の値を図-5のごとき直線および放物線変化のハンナリ形状についてそれぞれ求めた断面の都合上ここで一括略す。

式(8)に $\tau_A = \theta_A - R$, $\tau_B = \theta_B - R$, 剛度 $K = EI_0/l$ の慣用置換を行ったのち連立に解いて M_{AB}, M_{BA} を求めれば所要の弾塑性たわみ角式が次のごとく誘導される。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= EK_0 (C_1 \theta_A + C_2 \theta_B - (C_2 + C_3) R) + f_{Ai} M_{coi} + f_{Aj} M_{coj} + f_{Ak} M_{con} - C_{AB} \\ M_{BA} &= EK_0 (C_1 \theta_A + C_2 \theta_B - (C_2 + C_3) R) - f_{Bi} M_{coi} - f_{Bj} M_{coj} - f_{Bk} M_{con} + C_{BA} \end{aligned} \right\} (9)$$

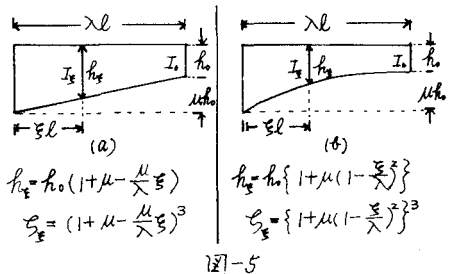
ここに係数 C_1, C_2, C_3 および弾塑性項 $f_{Ai}, f_{Aj}, f_{Ak}, f_{Bi}, f_{Bj}, f_{Bk}$, τ_0 は荷重項 C_{AB}, C_{BA} は次式で示される。

$$\text{係数: } C_1 = \partial_A / (\partial_A \partial_B - \beta^2), \quad C_2 = \beta / (\partial_A \partial_B - \beta^2), \quad C_3 = \partial_B / (\partial_A \partial_B - \beta^2)$$

$$\text{弾塑性項: } f_{Ai} = C_1 \gamma_{Ai} - C_2 \gamma_{Bi}, \quad f_{Aj} = C_1 \gamma_{Aj} - C_2 \gamma_{Bj}, \quad f_{Ak} = C_1 \gamma_{Ak} - C_2 \gamma_{Bk}, \quad f_{Bi} = -C_2 \gamma_{Ai} + C_3 \gamma_{Bi}, \quad f_{Bj} = -C_2 \gamma_{Aj} + C_3 \gamma_{Bj}, \quad f_{Bk} = -C_2 \gamma_{Ak} + C_3 \gamma_{Bk} \quad (10)$$

$$\text{荷重項: } C_{AB} = C_1 \tau_{A0} - C_2 \tau_{B0}, \quad C_{BA} = -C_2 \tau_{A0} + C_3 \tau_{B0}$$

表-1において $\kappa=1$ とおけば式(7)は弾性変断面たわみ角式⁽²⁾, $\lambda_A = \lambda_B = 0$ とすれば山田氏⁽²⁾の導いた弾塑



性等断面たわみ角式(1)に一致し、 $\xi_i=0, \xi_j=\xi_{jn}, \xi_{n+1}=1$ とかけば両端のみ、 $\xi_i=\xi_{in}, \xi_n=\xi_{nn}$ とかけば途中にのみそれぞれ塑性領域が生ずる場合のたわみ角式となる。さう(=A端に塑性ヒンジが形成される場合は $M_{AB}=M_{AB}|_{\xi_{in}=0}=M_{yo}/(\eta_A)_{\xi_{in}=0}$ と一定になり、式(1)の M_{BA} は次式のごとく変換される。

$$M_{AB} = \sqrt{\frac{E_A I_A}{C_A}} |M_{yo}| \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \\ (11) \end{array} \right.$$

$$M_{BA} = E K_0 \left(C_3 - \frac{C_2}{C_1} \right) (\theta_B - R) - \left(\frac{C_1}{C_1} f_{Ai} + f_{Bj} \right) M_{Ai} - \left(\frac{C_1}{C_1} f_{Aj} + f_{Bi} \right) M_{Aj} - \left(\frac{C_1}{C_1} f_{nA} + f_{nB} \right) M_{nA} + \frac{C_1}{C_1} \sqrt{\frac{E_A I_A}{C_A}} |M_{yo}| + \left(\frac{C_2}{C_1} C_{AB} + C_{BA} \right) \quad (11)$$

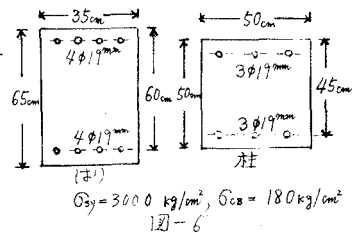
4. ハンチを有する不静定構造物の解法 ハンチを有する不静定構造物の弾塑性解析を行うには、上記式(9)および式(11)のたわみ角式を用いて節点の回転角および変位を未知数とし、節点方程式、せん断力の釣合式およびスパン方程式を用いて解く在来の変形法に準ずればよく、ただ塑性領域の境界を指定する $\xi_i, \xi_{in}, \xi_j, \xi_{jn}, \xi_n, \xi_{nn}$ などの未知数に対しては弾塑性境界条件としての式(14)が成立し、結局未知数と同数の条件式をうることになる。例えば図-4のハンチ部における ξ_i および ξ_{in} に対する境界条件式は次式より求められる。

$$\left. \begin{aligned} (\bar{M}_c)_{\xi=\xi_i} &= \frac{1}{\sqrt{E_A I_A}} M_{co} = (\bar{M})_{\xi=\xi_i} = \frac{1}{E_A(\xi_i)} \left\{ (1-\xi_i) M_{AB} - \xi_i M_{BA} + M_0(\xi_i) \right\} \\ (\bar{M}_c)_{\xi=\xi_{in}} &= \frac{1}{\sqrt{E_A I_A}} M_{co} = (\bar{M})_{\xi=\xi_{in}} = \frac{1}{E_A(\xi_{in})} \left\{ (1-\xi_{in}) M_{AB} - \xi_{in} M_{BA} + M_0(\xi_{in}) \right\} \end{aligned} \right\} (12)$$

5. 計算例

はりおよび柱の断面を図-6のごとく仮定すれば、式(3)より次の諸値をうる。

$$\begin{aligned} \text{はり: } EI_0 &= 20.00 \times 10^3 \text{ t}\cdot\text{m}^2 & \text{柱: } EI_0 &= 12.38 \times 10^3 \text{ t}\cdot\text{m}^2 \\ M_{co} &= 9.165 \text{ t}\cdot\text{m} & M_{co} &= 6.999 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M_{yo} &= 20.05 \text{ t}\cdot\text{m} & M_{yo} &= 11.96 \text{ t}\cdot\text{m} \\ K &= 5.063 & K &= 7.742 \end{aligned}$$



(1) 図-7に示すごとく内型ラーメンは単一集中荷重が載荷して、はりの中央近傍に15cmの塑性領域が生じた状態(=かける荷重Pおよびそのときの曲げモーメント M_A, M_E をハンチの傾き φ をパラメータとして求めれば次のごとくである。

端モーメント式は式(9)より

$$\left. \begin{aligned} \text{はり AB: } M_{AB} &= E K_0 (C_{16} - C_{26}) \theta_A + f_6 M_{co} - C_{AB} \\ \text{柱 AC: } M_{AC} &= E K_0 (C_{16} - C_{26}/C_{36}) \theta_A \end{aligned} \right\} (13)$$

次(=A側の節点方程式 $M_{AB} + M_{AC} = 0$ を用いて

$$\{ E K_0 (C_{16} - C_{26}) + E K_0 (C_{16} - C_{26}/C_{36}) \} \theta_A - C_{AB} = -f_6 M_{co} \quad (14)$$

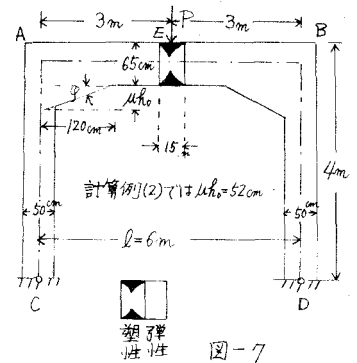
一方弾塑性境界条件式より $M_{co} = M_{AB} + 0.486 P l / 2$ を、これに式(13)を代入して

$$E K_0 (C_{16} - C_{26}) \theta_A + 1.458 P - C_{AB} = (1 - f_6) M_{co} \quad (15)$$

ここ(=係数表式(10)、図-5、表-1および $E v_{max}$ の図表を用いて求められ、例えば $\tan \varphi = 1/2$ のとき次値となる。

$$C_{16} = 7.394, C_{26} = 5.070, f_6 = 0.118, C_{AB} = 0.979 P, C_{16} = 7.008, C_{26} = 3.346, C_{36} = 4.605$$

この値を式(14)および式(15)に代入すれば



$$\left. \begin{aligned} 21.92 \times 10^3 \theta_A - 0.979 P &= -1.082 \\ 7.749 \times 10^3 \theta_A + 0.484 P &= 8.083 \end{aligned} \right\} (16)$$

式(16)を連立に解いたうゑ、式(13)に代入すれば結局次値をうる。

$$\theta_A = 0.405 \times 10^{-3}, P = 10.23 \text{ t}, M_{AB} = -M_{AC} = -5.737 \text{ tm}, M_E = 9.595 \text{ tm}$$

同様 $\tan \varphi = 0, 1/3, 1$ の場合について P, M_{AB} および M_E をそれぞれ算定して結果を表-2 および図-8 に示した。これより次のことが考察される。

(i) 一定の塑性領域に對し、最も危険な断面の曲げモーメント M_E を最小ならしめる傾きは $\tan \varphi = 1/3$ であり、これは通常のハンチの設計が1:3の勾配を採用している妥当性を立証するものである。

(ii) 荷重 P を最大ならしめる傾きは 45° の場合であるが、 M_E もかえりて増大せしめているゆゑ、経済的なハンチとはいえない。

(iii) 図-8のごとくハンチの影響において M_E 値にはさほど変化が起らないことが分るが、これは断面を均等に増加させるのと同一効果をうることになるゆゑハンチ効果を利用すべきことが認められる。

(2) 図-7と同じ内型ラーメンに集中荷重 $P=10\text{t}$ が作用したときの曲げモーメントの算出方法は、当初塑性領域の発生が未知なるため、まず弾性値を第0次近似値として用い、以下式(12)、式(13) および式(14)を用いての繰返し演算となる。結果のみ示せば表-3のごとく収斂値がえられ曲げモーメント図は図-9のごとく、また中央変位のたわみは $\delta = 1.331 \times 10^{-3} \text{ m}$ となる。

表-3

	$\delta \text{ cm}$	M_{AB}	M_E
第0次近似値	14.436 ^{mm}	-5.5614 tm	9.4386 tm
第1次近似値	11.208	-5.5618	9.4382
第2次近似値	10.932	-5.5622	9.4378
第3次近似値	10.896	-5.5622	9.4378

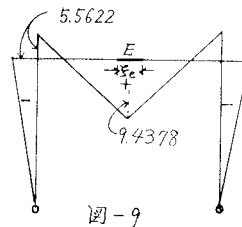


図-9

表-2

$\tan \varphi$	P	M_{AB}	M_E
0 (等断面)	9.37	-4.488	9.562
1/3 (18°26')	9.96	-5.414	9.528
1/2 (26°34')	10.23	-5.737	9.595
1 (45°)	10.83	-6.701	9.548

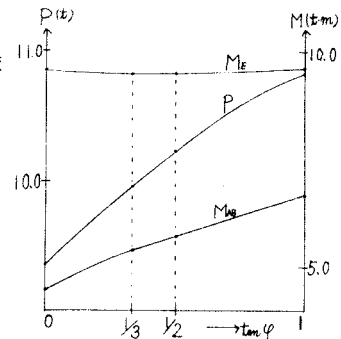


図-8

6. 結論 本研究はハンチを有する矩形断面のRC部材の弾塑性たわみ荷重式を等断面置換法⁽³⁾によって誘導し、もってRC構造物の弾塑性解析に對する実用化を図った。たゞ、T形断面に對しても本法と同様に解析可能となる。また弾性解析においてハンチ部を剛域に置換する方法⁽⁶⁾も行なわれているが、剛域を考慮した弾塑性解析については目下研究中である。なお本研究は文部省科学研究費の補助を受けた、記して謝意を表する。

文献①武藤清：耐震設計シリーズ2. 鉄筋コンクリート構造物の塑性設計 (4)山田孝一郎：撓角法形式による骨組の弾塑性解析法とその応用、建築学会論文報告集、第80号、第81号、(3)山崎石町・松隈：カバープレートをもつ変断面ばりの弾塑性解析、土木学会西部支部研究発表會論文集、昭和42年1月

(4) Yang, C. H., Knudsen, K. E., Weiskopf, W. H. 外: Plastic Strength and Deflection of Continuous Beams, Progress Report NO. 9, The Welding Journal, Vol. 32, May, 1953. (5) L. T. Evans: Modified Slope-deflection Equations, Proceedings of ACI, Vol. 28, 1932 (6) 武藤清：耐震設計シリーズ1. 耐震計算法、丸善株式会社