

九州大学 工学部 正員 山崎 徳也

〃 〃 〃 樗木 武

〃 大学院 学生員 横田 漢

1. 緒言

連続板の固有周期算定法として倉田教授の論文⁽¹⁾があるが、これは一対辺が単純支承とか中間支承部のたわみがない等径間一方向連続板に関し、差分法を用いて解⁽²⁾に及ぶのである。先づ、著者らは振動たわみ角一端モーメント関係式による連続板の固有周期算定法を發表した⁽²⁾が、これによれば前記文献(1)は勿論のこと、外周辺が固定な単純支承の一方何れか二方向連続板の固有周期を全て求めることが出来、また中間支承部のたわみも考慮することが可能である。しかし上記二論文はいずれも自由辺を含む連続板に関してその適用は出来ず、また著者らの知るかぎりこの分野に関する研究は未だ見当たらない。

本論文は自由辺を含む連続板の固有周期算定法の第一報として、図-1に示すごとく一対辺が自由で種々の端辺条件を持つ一方向連続板を取り上げ、前記文献(2)と同様、振動たわみ角一端モーメント関係式を誘導し、これを用いてその固有周期を算定せんとするものである。

2. 振動たわみ角一端モーメント関係式の誘導

等方性平面板の自由振動の基礎微分方程

式は周知のごとく次式で表わされる。

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^4} \right\} = 0$$

ただし ρ : 板の密度, h : 板の厚さ (1) w : t 時刻における任意点 (x, y) のたわみ D : 板剛度

式(1)の解として次式を仮定する。

$$w = v \cos \omega t \quad (2)$$

ただし ω は固有振動数であり、 v は x, y のみの函数である。式(2)を式(1)に代入すれば v に関する次式がえられる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^4} - \frac{\rho h \omega^2}{D} v = 0 \quad (3)$$

2-2-2 図-2に示すごとく、一対辺が自由で他対辺が単純支承の矩形板において辺 C を x 軸、辺 A を y 軸とし、辺 C 、 D と辺 A 、 B の長さそれぞれを a 、 b とする。したがって式(3)の一般解を次のごとく仮定する。

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi}{a} y + \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (4)$$

式(4)を式(3)に代入すれば $X_n(x)$ 、 $Y_m(y)$ として次式が得らる。

$$\mu < \frac{a^2}{4} \pi^2, \quad \mu' < \frac{b^2}{4} \pi^2 \text{ のとき}$$

$$\left. \begin{aligned} X_n(x) &= A_n^1 \sinh \pi \mu x + B_n^1 \cosh \pi \mu x + C_n^1 \sinh \pi \mu' x + D_n^1 \cosh \pi \mu' x \\ Y_m(y) &= A_m^2 \sinh \pi \mu' y + B_m^2 \cosh \pi \mu' y + C_m^2 \sinh \pi \mu y + D_m^2 \cosh \pi \mu y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

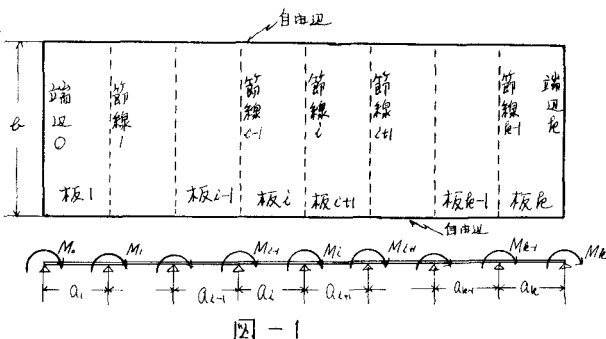


図-1

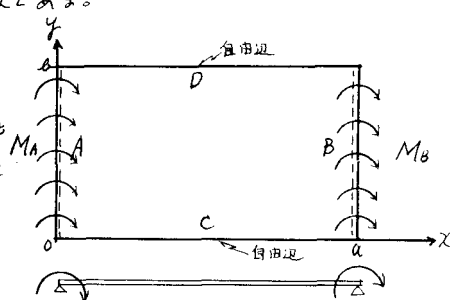


図-2

$$\mu > \frac{a^2}{b^2} n^2, \quad \mu' > \frac{a^2}{a'^2} m'^2 \text{ とし}$$

$$\left. \begin{aligned} X_n(\xi) &= A_n^x \sinh \pi \lambda_n \xi + B_n^x \cosh \pi \lambda_n \xi + C_n^x \sin \pi \bar{\lambda}_n \xi + D_n^x \cos \pi \bar{\lambda}_n \xi \\ Y_m(\eta) &= A_m^y \sinh \pi \lambda_m \eta + B_m^y \cosh \pi \lambda_m \eta + C_m^y \sin \pi \bar{\lambda}_m \eta + D_m^y \cos \pi \bar{\lambda}_m \eta \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

$$\text{ただし } \lambda_n^2 = \frac{a^2}{b^2} n^2 + \mu, \quad \lambda_m^2 = \frac{a^2}{a'^2} m'^2 - \mu, \quad \mu = \frac{\omega}{\pi^2} a^2 \sqrt{\frac{FR}{D}}, \quad \lambda_n^2 = \frac{a^2}{b^2} n^2 + \mu', \quad \lambda_m^2 = \frac{a^2}{a'^2} m'^2 - \mu'$$

$$\mu' = \frac{\omega}{\pi^2} a'^2 \sqrt{\frac{FR}{D}}, \quad \bar{\lambda}_n = \sqrt{\mu - \frac{a^2}{b^2} n^2}, \quad \bar{\lambda}_m = \sqrt{\mu' - \frac{a^2}{a'^2} m'^2}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a'}$$

なお $\mu > \frac{a^2}{b^2} n^2, \quad \mu' > \frac{a^2}{a'^2} m'^2$ の場合の解は式(5')の右側の項の展開は式(5)と全く同様であるゆえ、以後式(5)の右側の項のみ論ずることにする。

式(5)を式(4)に代入すれば次の式のとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} v &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^x \sinh \pi \lambda_n \xi + B_n^x \cosh \pi \lambda_n \xi + C_n^x \sin \pi \bar{\lambda}_n \xi + D_n^x \cos \pi \bar{\lambda}_n \xi) \sin \pi n \eta \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (A_m^y \sinh \pi \lambda_m \eta + B_m^y \cosh \pi \lambda_m \eta + C_m^y \sin \pi \bar{\lambda}_m \eta + D_m^y \cos \pi \bar{\lambda}_m \eta) \sin \pi m \xi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし $A_n^x \sim D_n^x, A_m^y \sim D_m^y$ は積分定数。

図-2に示すごとく単純支持梁 A, B の端モーメント M_A, M_B が作用し、2つの支え沈下 δ_A, δ_B が起るものとし、これを正弦フーリエ級数式に展開すれば、 $\xi = 0, 1$ における境界条件は次のごとく与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0: \quad -D \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right)_{\xi=0} &= M_A = \sum_{n=1}^{\infty} M_{An} \sin \pi n \eta, \quad (v)_{\xi=0} = \delta_A = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{An} \sin \pi n \eta \\ \xi = 1: \quad -D \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right)_{\xi=1} &= M_B = - \sum_{n=1}^{\infty} M_{Bn} \sin \pi n \eta, \quad (v)_{\xi=1} = \delta_B = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{Bn} \sin \pi n \eta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(6)を式(7)に代入すれば、積分定数 $A_n^x \sim D_n^x$ が求まり次式のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} A_n^x &= \frac{a^2}{\pi^2 (\lambda_n^2 - \lambda_n'^2)} \sinh \pi \lambda_n \left(\frac{M_{An} \cosh \pi \lambda_n}{D} + \frac{M_{Bn}}{D} \right) + \frac{\lambda_n'^2 - \nu n^2 a^2 / b^2}{(\lambda_n^2 - \lambda_n'^2) \sinh \pi \lambda_n} (\delta_{An} \cosh \pi \lambda_n - \delta_{Bn}) \\ B_n^x &= \frac{-a^2}{\pi^2 (\lambda_n^2 - \lambda_n'^2)} \frac{M_{An}}{D} - \frac{\lambda_n'^2 - \nu n^2 a^2 / b^2}{\lambda_n^2 - \lambda_n'^2} \delta_{An} \\ C_n^x &= \frac{a^2}{\pi^2 (\lambda_n^2 - \lambda_n'^2)} \sinh \pi \lambda_n \left(\frac{M_{An} \cosh \pi \lambda_n}{D} + \frac{M_{Bn}}{D} \right) + \frac{\lambda_n^2 - \nu n^2 a^2 / b^2}{(\lambda_n^2 - \lambda_n'^2) \sinh \pi \lambda_n} (\delta_{An} \cosh \pi \lambda_n - \delta_{Bn}) \\ D_n^x &= \frac{-a^2}{\pi^2 (\lambda_n^2 - \lambda_n'^2)} \frac{M_{Bn}}{D} - \frac{\lambda_n^2 - \nu n^2 a^2 / b^2}{\lambda_n^2 - \lambda_n'^2} \delta_{Bn} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

また自由端における境界条件は次の通りである。

$$\eta = 0, 1: \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \eta} = 0 \quad (9)$$

式(6)を式(9)に代入すれば、残りの積分定数 $A_m^y \sim D_m^y$ が次のごとく求まる。

$$\left. \begin{aligned} A_m^y &= -\frac{2}{\pi} \frac{\lambda_m^2 - \nu m'^2 / a'^2}{W} \sum_{n=1}^{\infty} K \left\{ U \{ (\pm)^n + \cosh \pi \lambda_m \} \{ (\pm)^n - \cosh \pi \lambda_n \} + V \sinh \pi \lambda_m \sinh \pi \lambda_n \right\} \\ B_m^y &= \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_m^2 - \nu m'^2 / a'^2}{W} \sum_{n=1}^{\infty} K \left\{ U \sinh \pi \lambda_m \{ (\pm)^n - \cosh \pi \lambda_n \} - V \sinh \pi \lambda_m \{ (\pm)^n - \cosh \pi \lambda_n \} \right\} \\ C_m^y &= -\frac{2}{\pi} \frac{\lambda_m^2 - \nu m'^2 / a'^2}{W} \sum_{n=1}^{\infty} K \left\{ V \{ (\pm)^n + \cosh \pi \lambda_m \} \{ (\pm)^n - \cosh \pi \lambda_n \} + U \sinh \pi \lambda_m \sinh \pi \lambda_n \right\} \\ D_m^y &= \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_m^2 - \nu m'^2 / a'^2}{W} \sum_{n=1}^{\infty} K \left\{ V \sinh \pi \lambda_m \{ (\pm)^n - \cosh \pi \lambda_n \} - U \sinh \pi \lambda_m \{ (\pm)^n - \cosh \pi \lambda_n \} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\text{ただし } U = -\lambda_n (\lambda_n^2 - \nu m'^2 / a'^2) \frac{mn}{(\lambda_n^2 + m'^2)(\lambda_n^2 + m^2)}, \quad V = -\lambda_m (\lambda_m^2 - \nu m'^2 / a'^2) \frac{mn}{(\lambda_n^2 + m'^2)(\lambda_n^2 + m^2)}$$

$$W = -2\lambda_n \lambda_m^2 (\lambda_n^2 - \nu m'^2 / a'^2) (\lambda_m^2 - \nu m'^2 / a'^2) (1 - \cosh \pi \lambda_m \cosh \pi \lambda_n) - \{ (\lambda_m^2 - \nu m'^2 / a'^2) \lambda_n^2 + (\lambda_n^2 - \nu m'^2 / a'^2) \lambda_m^2 \} \sinh \pi \lambda_m \sinh \pi \lambda_n$$

$$K = \{ (1-\nu)^2 m^2 n + (2-\nu)^2 a'^2 / a^2 \} \delta_{An} - (\pm)^m \delta_{Bn} + \{ n^2 + (2-\nu) m'^2 / a'^2 \} \frac{a^2}{\pi^2} \left\{ \frac{M_{An}}{D} + (\pm)^m \frac{M_{Bn}}{D} \right\}$$

さて、図-2に示すごとく矩形板において辺 A, B におけるたわみ角は一般に η の函数であるが、これを代数学函数で表わすとは困難であるゆえ、正弦フーリエ級数を用いて次のごとく展開する。

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{An} \sin \pi n \eta, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{Bn} \sin \pi n \eta \quad (11)$$

他方、式(6)に関して x の第一次微係数を求め、 $\xi = 0, 1$ を代入すれば辺 A, B に関するたわみ角がえられ、これを式(11)の右辺に代入し、かつ式(8), (10)の結果を用いれば θ_{An}, θ_{Bn} と M_{An}, M_{Bn} ,

δ_{an}, δ_{bn} との関係式が求まり、演算のうえ整理すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \delta_{an} &= K_n \frac{a}{\pi} \frac{M_{an}}{D} + L_n \frac{a}{\pi} \frac{M_{bn}}{D} + H_n \frac{\pi}{a} \delta_{an} + J_n \frac{\pi}{a} \delta_{bn} + \sum_{n'=1}^{\infty} \left(T_{nn'} \frac{a}{\pi} \frac{M_{an'}}{D} + U_{nn'} \frac{a}{\pi} \frac{M_{bn'}}{D} + R_{nn'} \frac{\pi}{a} \delta_{an'} + S_{nn'} \frac{\pi}{a} \delta_{bn'} \right) \\ \delta_{bn} &= L_n \frac{a}{\pi} \frac{M_{an}}{D} + K_n \frac{a}{\pi} \frac{M_{bn}}{D} - J_n \frac{\pi}{a} \delta_{an} - H_n \frac{\pi}{a} \delta_{bn} - \sum_{n'=1}^{\infty} \left(-U_{nn'} \frac{a}{\pi} \frac{M_{an'}}{D} - T_{nn'} \frac{a}{\pi} \frac{M_{bn'}}{D} + S_{nn'} \frac{\pi}{a} \delta_{an'} + R_{nn'} \frac{\pi}{a} \delta_{bn'} \right) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{\lambda_n^2 - \lambda_n'^2} \left(\frac{\lambda_n}{\sinh \pi \lambda_n} - \frac{\lambda_n'}{\sinh \pi \lambda_n'} \right), \quad K_n = \frac{1}{\lambda_n^2 - \lambda_n'^2} \left(\lambda_n \cosh \pi \lambda_n - \lambda_n' \cosh \pi \lambda_n' \right) \\ T_{nn'} &= \left(\frac{2}{\pi} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{U \sinh \pi \lambda_m (\cosh \pi \lambda_m - (-1)^m) - V \sinh \pi \lambda_m' (\cosh \pi \lambda_m - (-1)^m)}{W} \right] \{ n^2 + (2 - \nu) m^2 b^2 / a^2 \} \right\} n = n' \\ U_{nn'} &= \left(\frac{2}{\pi} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{U \sinh \pi \lambda_m (\cosh \pi \lambda_m - (-1)^m) - V \sinh \pi \lambda_m' (\cosh \pi \lambda_m - (-1)^m)}{W} \right] \{ n^2 + (2 - \nu) m^2 b^2 / a^2 \} \right\} n = n' \\ R_{nn'} &= \left(\frac{2}{\pi} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{U \sinh \pi \lambda_m (\cosh \pi \lambda_m - (-1)^m) - V \sinh \pi \lambda_m' (\cosh \pi \lambda_m - (-1)^m)}{W} \right] \{ (1 - \nu)^2 m^2 n^2 + (2 - \nu) m^2 b^2 / a^2 \} \right\} n = n' \\ S_{nn'} &= \left(\frac{2}{\pi} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{U \sinh \pi \lambda_m (\cosh \pi \lambda_m - (-1)^m) - V \sinh \pi \lambda_m' (\cosh \pi \lambda_m - (-1)^m)}{W} \right] \{ (1 - \nu)^2 m^2 n'^2 + (2 - \nu) m^2 b^2 / a^2 \} \right\} n = n' \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)はその内容から明らかで、 α のみ角 α の端モーメントの正弦フーリエ級数展開式における展開係数間の関係式を示すもので、既往のはり理論における振動撓角式のごとく、 α のみ角と端モーメントとの関係を直接表わすものではない。かつ意をいいて式(12)を板の振動に α のみ角一端モーメント関係式と「関係」の二字を挿入して称することとする。

3. 節線方程式および連続条件式

連続板の節線上の節線方程式および連続条件式は先に著者が発表し、⁽²⁾ 連続板の解法の場合と同様にして求められる。すなわち図-1K示すごとく連続板において、節線 α 上の任意点 y におけるモーメントの釣り合い条件式と α のみ角の連続条件より、それぞれ次式がえられる。(図-3参照)

節線方程式: $M_{\alpha Bn} + M_{\alpha (1)An} = 0 \quad (13)$

連続条件式: $\theta_{\alpha Bn} = \theta_{\alpha (1)An} \quad (14)$

4. 端辺条件

図-1K示すごとくスパン数を n とし、

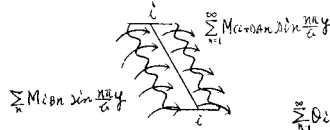
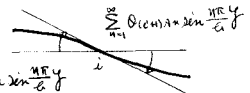


図-3



板1および板2の端辺をそれぞれ端辺Oおよび端辺Bと名付ける。しかると次のごとく端辺条件が与えられる。

	端 辺 O	端 辺 B
単純支承	$M_{1An} = 0, S_{1An} = 0$	$M_{2Bn} = 0, S_{2Bn} = 0$
固定支承	$\theta_{1An} = 0, S_{1An} = 0$	$\theta_{2Bn} = 0, S_{2Bn} = 0$
自由支承	$M_{1An} = 0, V_{1An} = 0$	$M_{2Bn} = 0, V_{2Bn} = 0$

(15)

ただし V_{1An}, V_{2Bn} は図-1K示すごとく連続板の板とにおける反力 V_{1A}, V_{2B} の正弦フーリエ級数展開式の展開係数である。(式は省略可也)

いま連続板の各節線上で式(12)の振動に α のみ角一端モーメント関係式を求め、その結果を式(14)の連続条件式に代入し、かつ式(13)の節線方程式および式的端辺条件とてれば未知数と回数と方程式をえ、これより図-1K示すごとく連続板に関する振動数方程式が導かれる。

5. 振動数方程式

両端固定支で等断面，等スパンを例として示せば次の通りである。

支承沈下がないものとして，板の， $l+1$ の節線において式(12)の振動にのみ角一端モーメント関係式を求めれば次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{l+1} &= k_n \frac{a}{\pi} \frac{M_{l+1}n}{D} + k_n \frac{a}{\pi} \frac{M_{l+1}n}{D} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\bar{U}_{lm} \frac{a}{\pi} \frac{M_{l+1}n}{D} - \bar{T}_{lm} \frac{a}{\pi} \frac{M_{l+1}n}{D} \right) \\ Q_{(l+1)An} &= k_n \frac{a}{\pi} \frac{M_{(l+1)An}}{D} + k_n \frac{a}{\pi} \frac{M_{(l+1)An}}{D} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{U}_{lm} \frac{a}{\pi} \frac{M_{(l+1)An}}{D} + \bar{U}_{lm} \frac{a}{\pi} \frac{M_{(l+1)An}}{D} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式(16)と式(14)を代入し，さらに式(13)の関係を用いれば次式で与えられる。

$$2k_n M_{(l+1)An} - 2k_n M_{l+1}n + k_n M_{(l+1)An} + \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{U}_{lm} M_{(l+1)An} - 2\bar{T}_{lm} M_{l+1}n + \bar{U}_{lm} M_{(l+1)An}) = 0 \quad (17)$$

$$\text{R.S.V} \quad M_{l+1}n = M_{(l+1)An} = -M_{(l+1)An} \quad (18) \quad l=1, 2, 3, \dots, n-1$$

また両端の固定条件より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} k_n M_{1An} + k_n M_{1n} + \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{U}_{1m} M_{1An} + \bar{U}_{1m} M_{1n}) &= 0 \\ k_n M_{nAn} + k_n M_{nAn} - \sum_{m=1}^{\infty} (-\bar{U}_{nm} M_{nAn} - \bar{T}_{nm} M_{nAn}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式(19)の関係と式(17)を用いれば次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} -k_n M_{1An} + k_n M_{1n} + \sum_{m=1}^{\infty} (-\bar{U}_{1m} M_{1An} + \bar{U}_{1m} M_{1n}) &= 0 \\ k_n M_{(l+1)An} - k_n M_{l+1}n + \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{U}_{lm} M_{(l+1)An} - \bar{T}_{lm} M_{l+1}n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(17)，(20)の連立方程式において未知数 M_{1An} ， M_{1n} ， M_{2An} ， $\dots$ ， $M_{(l+1)An}$ ， $M_{l+1}n$ がそれぞれ 0 とはならないためにはこれら諸式の係数行列式が 0 となる条件より，次のような振動数方程式が与えられる。

$$\left| \begin{array}{ccc} (A) & (B) & 0 \\ (A) & (C) & (B) \\ 0 & (B) & (C) & (B) \\ & (B) & (A) \end{array} \right| = 0 \quad \text{R.S.V} \quad (A) = \begin{bmatrix} -(k_1 + \pi_{11}) & -\pi_{12} & \dots & -\pi_{1n} \\ -\pi_{21} & -(k_2 + \pi_{22}) & \dots & -\pi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\pi_{n1} & -\pi_{n2} & \dots & -(k_n + \pi_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$(B) = \begin{bmatrix} (k_1 + \pi_{11}) & \pi_{12} & \dots & \pi_{1n} \\ \pi_{21} & (k_2 + \pi_{22}) & \dots & \pi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{n1} & \pi_{n2} & \dots & (k_n + \pi_{nn}) \end{bmatrix} \quad (C) = \begin{bmatrix} -2(k_1 + \pi_{11}) & -2\pi_{12} & \dots & -2\pi_{1n} \\ -2\pi_{21} & -2(k_2 + \pi_{22}) & \dots & -2\pi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2\pi_{n1} & -2\pi_{n2} & \dots & -2(k_n + \pi_{nn}) \end{bmatrix} \quad (21)$$

(b) 結論

一対向自由な一方向連続板に関する振動数方程式は式(12)，(13)から分るごとく各元 m に関する 3 類数値で表わされ，さらに n に関して無限の次数をもつ行列式であるので計算上は収束計算となる。なお本法と同様の手法により，直交異方性連続板の固有周期を算定することは可能であり，これは後日発表の予定である。

本研究は文部省科学研究費の補助を受けた。記して謝意を表す。

(参考文献)

- ① 倉田宗章：On Vibration of Continuous Rectangular plates Proc. App Mech 1951
- ② 山崎・樗木・横田：連続等方性矩形板の固有周期算定法 昭和4年度土木学会西部支部研究発表会論文集
- ③ 山崎・樗木・横田：板の2角一端モーメント関係式による等方性連続板の解法 九大工学集報第4巻第2号