

I-7 直交異方性斜板の振動解析

九州大学工学部 正員 山崎徳也

〃 〃 正員 彦坂 熙

〃 大学院 学生員 〇古川恒雄

1 緒言

先に著者らは等方性斜板の自由振動に対する一般的解法を提示し、固有振動数ならびに振動モードの解析結果と併せ報告したが、土木構造物にしばしば見られる斜桁橋あるいは鉄筋コンクリート斜スラブ橋などの振動解析は異方性斜板としての取扱が必要となり、この見地から既に成岡教授⁽²⁾は階差法を用いて斜桁橋を直交異方性斜板として計算し、斜角による固有振動数の変化が大なることを示している。本研究は前述の著者⁽¹⁾の研究を、いわゆる Huber⁽³⁾の式を導入することにより鉄筋コンクリート斜スラブを主対象とする任意周辺支持条件をもつ直交異方性斜板の振動解析に拡張応用したもので、本文中に定義された $\kappa=1$ とおくことにより等方性斜板の、また斜角 $\varphi=0$ とおくことにより矩形板の振動をそれぞれ包含する。

2. 振動の基礎微分方程式

図-1のごとく2辺の長さが a, b の平行四辺形板を考え、これら2辺に沿って斜交座標 x, y をまた原点を共有する直交座標 $\bar{x}, \bar{y}$ および x', y' をそれぞれ定めれば、これら各座標間には次の関係式が成立する。

$$x = \bar{x} - \bar{y} \tan \varphi, \quad y = \bar{y} \sec \varphi. \quad (1)$$

$$x = x' \sec \varphi, \quad y = y' - x' \tan \varphi. \quad (2)$$

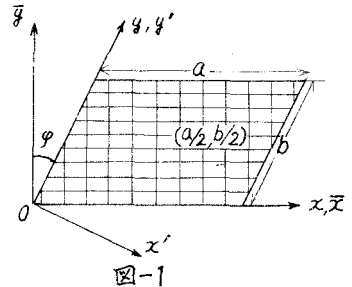


図-1

本研究で扱う直交異方性斜板の弾性主軸は図-1のごとく上記 $\bar{x}$ および $\bar{y}$ 軸に一致するものとし、面に垂直なたわみを W であらわせば振動の基礎微分方程式は周知のごとく次式であらわされる。

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \quad (3)$$

$$\text{ただし } D_x = \frac{h^3 E_x}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \quad D_y = \frac{h^3 E_y}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \quad D_{xy} = \frac{h^3 G}{12},$$

$$D_1 = \frac{\nu_y h^3 E_x}{12(1-\nu_x \nu_y)} = \frac{\nu_x h^3 E_y}{12(1-\nu_x \nu_y)}$$

h : 板厚、 ρ : 板の密度、 ν_x, ν_y : ポアソン比、 E_x, E_y : 弾性係数、 G : せん断弾性係数

式(1)を用いて式(3)を (x, y) 座標に変換し $\sin \varphi = S_0, \cos \varphi = C_0, D_1 + 2D_{xy} = H$ とおけば次式となる。

$$\begin{aligned} \rho h C_0^4 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (D_x C_0^4 + 2H C_0^2 S_0^2 + D_y S_0^4) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - 4S_0 (H C_0^2 + D_y S_0^2) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + 2(H C_0^2 + 3D_y S_0^2) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} - 4S_0 D_y \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで鉄筋コンクリートスラブに関する Huber の式 $H = \sqrt{D_x D_y}$ を導入し、 $\kappa = \sqrt{D_y/D_x}$ とおいて式(4)を変形すれば、結局曲げの基礎微分方程式として次式がえられる。

$$\begin{aligned} \frac{\rho h}{D_y} C_0^4 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{\kappa^2} C_0^2 + S_0^2 \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - 4S_0 \left(\frac{1}{\kappa^2} C_0^2 + S_0^2 \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + 2 \left(-\frac{1}{\kappa^2} C_0^2 + 3S_0^2 \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} - 4S_0 \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

3. 境界条件の斜交座標表示

直交異方性板の断面力、すなわち曲げモーメント、捩りモーメント、およびせん断力を式(1)の変換により斜交座標で表わせば、それぞれ次のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = -D_x \frac{1}{C_x^2} \left[(C_x^2 + \nu_y S_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \nu_y S_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] \\ M_y &= -D_y \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = -D_y \frac{1}{C_y^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + (S_y^2 + \nu_x C_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2 S_y \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] \\ M_{xy} &= 2 D_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 2 D_{xy} \frac{1}{C_x} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - S_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \\ Q_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = -D_x \frac{1}{C_x^2} \left[(C_x^2 + K^2 S_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - 2 S_x K^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y} \right] \\ Q_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = -D_y \frac{1}{C_y^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 3 S_y \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + (3 S_y^2 + \frac{C_y^2}{K^2}) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y} - S_y (S_y^2 + \frac{C_y^2}{K^2}) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \right\} (6)$$

また、 y 軸に平行な断面に作用する曲げモーメントは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M_x' &= C_x^2 M_x + S_x^2 M_y + 2 S_x C_x M_{xy} \\ &= -D_x \frac{1}{C_x^2} \left[\left\{ \frac{1}{K^2} C_x^2 + S_x^2 (\nu_x C_x^2 + S_x^2) + N_x S_x C_x^2 \right\} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \left\{ (\nu_x C_x^2 + S_x^2) + S_x^2 + N_x C_x^2 \right\} S_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + (\nu_x C_x^2 + S_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

ただし $N_x = \nu_x + 4 D_{xy} / D_y$

いま周辺支持条件として、図-2のごとく (i) 4 辺固定、(ii) 4 辺単純支持、(iii) 1 対辺単純支持、他対辺自由、(iv) 1 対辺単純支持、他対辺弾性梁支持、の 4 種を例にとれば、これらの境界条件はそれぞれ次のごとく表わされる。

$$(i) \text{ 4 辺固定. } (W)_{x=0,a} = (W)_{y=0,b} = 0, \quad (\theta_x)_{x=0,a} = \frac{1}{C_x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - S_x \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{x=0,a} = 0, \quad (\theta_y)_{y=0,b} = \frac{1}{C_y} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - S_y \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{y=0,b} = 0 \quad (8)$$

ただし、 θ_x, θ_y : y 軸および x 軸まわりのたわみ角。

$$(ii) \text{ 4 辺単純支持. } (W)_{x=0,a} = (W)_{y=0,b} = 0, \quad (M_x)_{x=0,a} = (M_y)_{y=0,b} = 0. \quad (9)$$

$$(iii) \text{ 1 対辺単純支持, 他対辺自由. } (W)_{x=0,a} = 0, \quad (M_x')_{x=0,a} = (M_y)_{y=0,b} = 0, \quad (V_y)_{y=0,b} = \left[Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right]_{y=0,b} = -D_y \frac{1}{C_y^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 3 S_y \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} + (3 S_y^2 + N_x C_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x^2} - S_y (S_y^2 + N_x C_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]_{y=0,b} = 0 \quad (10)$$

ただし V_y : x 軸に平行な断面に作用する反力。

(iv) 1 対辺単純支持、他対辺弾性梁支持。

$$\begin{aligned} (W)_{x=0,a} &= 0, \quad (M_x)_{x=0,a} = 0, \quad -C_x \frac{1}{C_x} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x^2} - S_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{y=0,b} = D_y \frac{1}{C_y^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 S_y \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} + (S_y^2 + \nu_x C_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]_{y=0,b} \\ EI \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{y=0,b} &= D_y \frac{1}{C_y^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 3 S_y \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} + (3 S_y^2 + N_x C_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x^2} - S_y (S_y^2 + N_x C_x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]_{y=0,b} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし C : 梁の捩り剛性, EI : 梁の曲げ剛性。

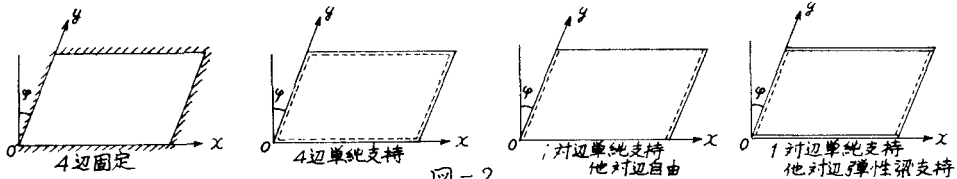


図-2

4. 振動数方程式の誘導

斜板の固有円振動数を ω とするとき、式(5)の基礎微分方程式を満足するたわみ W が次式で表わされるものとする。

$$W = W(x, y) \cdot \cos \omega t. \quad (12)$$

式(12)を式(5)に代入し、両辺を $\cos \omega t$ で約せば、 x, y のみに関する次の微分方程式をうる。

$$-\frac{P_0}{D_y} \omega^2 C_y^2 W + \left(\frac{1}{K^2} C_y^2 + S_y^2\right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 4S_y \left(\frac{1}{K^2} C_y^2 + S_y^2\right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y} + 2\left(\frac{1}{K^2} C_y^2 + 3S_y^2\right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y^2} - 4S_y \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \quad (13)$$

式(13)を満足する W の解は次式で与えられる。

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_{1n} \cosh \pi \beta_1 (\xi - \frac{1}{2}) + A_{2n} \sinh \pi \beta_1 (\xi - \frac{1}{2}) + A_{3n} \cosh \pi \beta_2 (\xi - \frac{1}{2}) + A_{4n} \sinh \pi \beta_2 (\xi - \frac{1}{2})\} \cos \pi n \left\{ \frac{b}{a} \varepsilon_0 (\xi - \frac{1}{2}) + \eta - \frac{1}{2} \right\} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \{B_{1m} \cosh \pi \delta_1 (\eta - \frac{1}{2}) + B_{2m} \sinh \pi \delta_1 (\eta - \frac{1}{2}) + B_{3m} \cosh \pi \delta_2 (\eta - \frac{1}{2}) + B_{4m} \sinh \pi \delta_2 (\eta - \frac{1}{2})\} \cos \pi m \left\{ \frac{b}{a} S_0 (\eta - \frac{1}{2}) + \xi - \frac{1}{2} \right\} \quad (14)$$

ただし $A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}, A_{4n}, B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}, B_{4m}$ は境界条件から定まる積分定数である。

また式(14)の記号は次の内容をもつ。

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \beta_1 = \frac{a}{b} C_y \frac{\varepsilon_0}{S_0} \sqrt{n^2 + \frac{b^2}{\pi^2} \omega \sqrt{\frac{P_0}{D_y}} (C_y^2 + K^2 S_y^2)}, \quad \delta_1 = \frac{b}{a} C_y \frac{1}{K} \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{\pi^2} \omega \sqrt{\frac{P_0}{D_y}} K^2}, \quad \varepsilon_0 = \frac{K^2 S_0}{C_y^2 + K^2 S_y^2}, \\ \eta = \frac{y}{b}, \quad \beta_2 = \frac{a}{b} C_y \frac{\varepsilon_0}{S_0} \sqrt{n^2 - \frac{b^2}{\pi^2} \omega \sqrt{\frac{P_0}{D_y}} (C_y^2 + K^2 S_y^2)}, \quad \delta_2 = \frac{b}{a} C_y \frac{1}{K} \sqrt{m^2 - \frac{a^2}{\pi^2} \omega \sqrt{\frac{P_0}{D_y}} K^2}$$

周辺支持条件が前節の(i),(ii),(iii),(iv)のごとく斜板の中心点 $(a/2, b/2)$ に関して対称なる場合は、式(14)を板の中心点に関する対称および逆対称振動に対応した2式に分離できる。すなわち

(1) 対称振動

$W(\xi, \eta) = W(1-\xi, 1-\eta)$ の条件から

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_{1n} \cosh \pi \beta_1 (\xi - \frac{1}{2}) + A_{3n} \cosh \pi \beta_2 (\xi - \frac{1}{2})\} \cos \pi n \left\{ \frac{b}{a} \varepsilon_0 (\xi - \frac{1}{2}) + \eta - \frac{1}{2} \right\} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \{B_{1m} \cosh \pi \delta_1 (\eta - \frac{1}{2}) + B_{3m} \cosh \pi \delta_2 (\eta - \frac{1}{2})\} \cos \pi m \left\{ \frac{b}{a} S_0 (\eta - \frac{1}{2}) + \xi - \frac{1}{2} \right\} \quad (15)$$

(2) 逆対称振動

$W(\xi, \eta) = -W(1-\xi, 1-\eta)$ の条件から

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_{2n} \sinh \pi \beta_1 (\xi - \frac{1}{2}) + A_{4n} \sinh \pi \beta_2 (\xi - \frac{1}{2})\} \cos \pi n \left\{ \frac{b}{a} \varepsilon_0 (\xi - \frac{1}{2}) + \eta - \frac{1}{2} \right\} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \{B_{2m} \sinh \pi \delta_1 (\eta - \frac{1}{2}) + B_{4m} \sinh \pi \delta_2 (\eta - \frac{1}{2})\} \cos \pi m \left\{ \frac{b}{a} S_0 (\eta - \frac{1}{2}) + \xi - \frac{1}{2} \right\} \quad (16)$$

任意の周辺支持条件をもつ斜板について、 $x=0, a, y=0, b$ の各辺につき2個、合計8個の境界条件式が式(8)~式(11)のごとく成立し、これら各式の W に式(14)を代入すれば、次のごとく8個の式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} f_{1n}(y) + A_{2n} f_{2n}(y) + A_{3n} f_{3n}(y) + A_{4n} f_{4n}(y)] + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} g_{1m}(y) + B_{2m} g_{2m}(y) + B_{3m} g_{3m}(y) + B_{4m} g_{4m}(y)] &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} f_{1n}(y) + \dots + A_{4n} f_{4n}(y)] + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} g_{1m}(y) + \dots + B_{4m} g_{4m}(y)] &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} f_{1n}(x) + \dots + A_{4n} f_{4n}(x)] + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} g_{1m}(x) + \dots + B_{4m} g_{4m}(x)] &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} f_{1n}(x) + A_{2n} f_{2n}(x) + A_{3n} f_{3n}(x) + A_{4n} f_{4n}(x)] + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{1m} g_{1m}(x) + B_{2m} g_{2m}(x) + B_{3m} g_{3m}(x) + B_{4m} g_{4m}(x)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに $f(y), g(y)$ および $f(x), g(x)$ はそれぞれ y および x のみの函数である。

式(17)の第1式から第4式までは辺 $x=a$ に関する、また第5式から第8式までは辺 $y=0, b$ に関する境界条件に由来する諸式で、前者はすべての y について後者はすべての x について成立せねばならない。ここで式(17)の各式の左辺をフーリエ正弦級数 $\sum P_n \sin \frac{n\pi}{b} y$, または $\sum Q_m \sin \frac{m\pi}{a} x$ の形に展開すれば、これら各式が x, y の値にかかわらず常に成立するためには、各展開係数 P_n, Q_m はすべて0でなければならず正弦級数展開を n については第 N 項、 m については第 M 項まで行くとすれば、未知数 $A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}, A_{4n}, B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}, B_{4m}$ に関する次のごとき $4(M+N)$ 元連立1次同次方程式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^N [\lambda_{1,2n} A_{1n} + \lambda_{1,2n+1} A_{2n} + \lambda_{1,2n+2} A_{3n} + \lambda_{1,2n+3} A_{4n}] + \sum_{m=1}^M [\mu_{1,m} B_{1m} + \mu_{1,N+m} B_{2m} + \mu_{1,2M+m} B_{3m} + \mu_{1,3M+m} B_{4m}] &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{n=1}^N [\lambda_{4N,n} A_{1n} + \dots\dots\dots + \lambda_{4N,3N+n} A_{4n}] + \sum_{m=1}^M [\mu_{4N,m} B_{1m} + \dots\dots\dots + \mu_{4N,3M+m} B_{4m}] &= 0 \\ \sum_{n=1}^N [\lambda_{4N+1,n} A_{1n} + \dots\dots\dots + \lambda_{4N+1,3N+n} A_{4n}] + \sum_{m=1}^M [\mu_{4N+1,m} B_{1m} + \dots\dots\dots + \mu_{4N+1,3M+m} B_{4m}] &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{n=1}^N [\lambda_{4N+4M,n} A_{1n} + \lambda_{4N+4M,N+n} A_{2n} + \lambda_{4N+4M,2N+n} A_{3n} + \lambda_{4N+4M,3N+n} A_{4n}] + \sum_{m=1}^M [\mu_{4N+4M,m} B_{1m} + \mu_{4N+4M,N+m} B_{2m} + \mu_{4N+4M,2M+m} B_{3m} + \mu_{4N+4M,3M+m} B_{4m}] &= 0 \end{aligned} \right\} (18)$$

連立方程式(18)の未知数 $A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}, A_{4n}, B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}, B_{4m}$ がすべて0でない解をもつための必要充分条件から式(18)の係数行列式=0とあくことにより振動数方程式がえられ、これを満足する ω が所要の固有振動数である。

5. 振動モード

任意の固有振動数に対する斜板の自由振動は式(5)と満足する式(12)によって決定されるが、特定の時刻における振動モードは式(14)より求められ、そのためには積分定数 $A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}, A_{4n}$ および $B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}, B_{4m}$ の相互の比を求める必要がある。式(18)は連立1次同次方程式であることより任意の1式は残りの $(4M+4N-1)$ 個の式の1次結合によって表わされるゆえ、例えば式(18)において $A_0=1$ と置き、任意の1式を除いてえられる $(4M+4N-1)$ 元連立1次方程式を解けば、未知数 $A_{1n}(n=2,3,4,\dots,N), A_{2n}, A_{3n}, A_{4n}(n=1,2,3,\dots,N)$ および $B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}, B_{4m}(m=1,2,3,\dots,M)$ の A_0 に対する比が求められ、式(14)より所要の振動モードがえられる。

6. 計算例

図-2に示した周辺支持条件のうち(i)4辺固定、(ii)4辺単純支持、(iii)1対辺単純支持他対辺自由の場合につき、 $\eta=0, \kappa=1, a=b$ の特例についてそれぞれの固有振動数 ω を算定し、無次元量 $\gamma = \frac{a^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{Eh}{D_0}}$ について矩形板に関する既往研究⁽⁴⁾⁽⁵⁾と比較したものが表-1であり、展開級数10項以下で十分な精度をうることがみとめられる。

表-1

周辺支持条件	級数の項数	$\gamma = \frac{a^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{Eh}{D_0}}$	
		着者	既往研究 ⁽⁴⁾⁽⁵⁾
i) 4辺固定	$N=M=10$	3.645	3.646
ii) 4辺単純支持	$N=M=7$	1.999	2.000
iii) 1対辺単純支持 他対辺自由	$N=M=7$	0.9760	0.9759

7. 結語

任意周辺支持条件をもつ鉄筋コンクリート斜スラブを対象として、直交異方性を考慮したHuberの式を導入することにより、自由振動の基礎微分方程式(5)に基づく固有振動数および振動モードの解法を提示した。本法はスラブの境界条件の如何にかかわらず一貫して適用しうる利点を持ち、また文献(6)と併用すれば強制振動の解析に拡張応用が可能となる。なお本文の式(18)より誘導される振動数方程式は、全要素に固有値を含む多元行列式となるため、当然固有値の算定は試算によることとなる。

参考文献

- (1) 山崎彦坂・古川：等方性斜板の振動解析、昭和41年度土木学会西部支部研究発表会論文集 昭和42年1月。
- (2) 成岡・大村・西島：直交異方性平行四辺形板に対する階差方程式、土木学会論文集第58号 昭和33年5月。
- (3) M.T. Huber: Die Theorie Der Kreuzweise Bewehrten Eisenbetonplatten Nebst Anwendungen Auf Mehrere Bautechnisch Wichtige Aufgaben Über Rechteckige Platten, Der Bauingenieur 1923 Heft 12.
- (4) S. Iguchi: Die Eigenwertprobleme für die elastische rechteckige Platte, 北大工紀 13巻8号 1938-4.
- (5) 井口鹿象：相対2辺が単純支持他の2辺が自由なる矩形板の振動について、土木学会誌 第26巻 昭和15年1月。
- (6) 山崎彦坂：鉄筋コンクリート斜スラブの解法、昭和41年度土木学会西部支部研究発表会論文集 昭和42年1月。