

九州大学 工学部 正員 山崎 徳也

〃 〃 〃 〇 山崎 毅

1 まえがき 先に著者らは曲げねじれ剛性を無視し得るとき断面を有する円形曲り梁の面外自由振動の解析について報告⁽¹⁾を行い、その中で両端にジョイントおよび両端固定の振動数方程式を示した。本研究は振動回転角式による連続あるいは複合円形曲り梁構造の振動解析の拡張を目的として、前報告に於いて得た基本式より円形曲り梁の面外振動回転角式を誘導し、もってかかる構造物の振動解析の統一手法を確立せんとするものである。尚、基本式の誘導に当っては円形曲り梁の軸面内の変位およびねじれ中心の断面中心からのずれを無視した。円形曲り梁の面外振動に関する既往研究としては、平井教授、深沢両氏⁽²⁾の軸面内変位を無視し、せん断中心の断面中心からのずれを考慮した直接解および小松教授、中井両氏⁽³⁾の両者を考慮した基礎微分方程式に基き Galerkin 法の適用による近似解などが見受けられるがいずれも前述のごとく本研究とは取扱ひ手法において内容形態を異にする。

2 円形曲り梁の基礎微分方程式 円形曲り梁の軸半径を R で表わせば梁に働く面外鉛直荷重強度 p 、ねじれモーメント荷重強度 m と曲げモーメント M 、せん断力 Q 、ねじれモーメント T との間に成立すべき力の釣合条件は図-1を参照して次式のごとく得られる。

$$\frac{dQ}{ds} + p = 0 \quad (1) \quad \frac{dM}{ds} - \frac{T}{R} - Q = 0 \quad (2) \quad \frac{dT}{ds} + m = 0 \quad (3)$$

次に梁の鉛直たわみ、たわみ角およびねじれ角をそれぞれ w, φ, ψ とすればこれら変位と施力との関係は次式で表わされる。

$$\frac{dw}{ds} = \varphi \quad (4) \quad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{M}{EI} - \frac{\psi}{R} \quad (5) \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{T}{GJ} + \frac{\varphi}{R} \quad (6)$$

右辺に EI および GJ はそれぞれ円形曲り梁の曲げ剛性およびねじれ剛性である。以上6式において、 $S=R\theta$, $\bar{\varphi}=R\varphi$, $\bar{\psi}=R\psi$ なる置き換えを行ひ M, Q, T および $\bar{\varphi}$ を消去すれば $w, \bar{\psi}$ に関する次の2式を得る。

$$\frac{d^4 w}{d\theta^4} - \mu \frac{d^2 w}{d\theta^2} + (1+\mu) \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\theta^2} - \frac{R^4}{EI} p = 0 \quad (7) \quad (1+\mu) \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \mu \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\theta^2} + \bar{\psi} - \frac{R^3}{EI} m = 0 \quad (8)$$

右辺に $\mu = GJ/EI$ とある。式(7),(8)より $\bar{\psi}$ を消去すれば鉛直たわみ w に関する次式が得られる。

$$\frac{d^6 w}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 w}{d\theta^4} + \frac{d^2 w}{d\theta^2} = \frac{R^4}{EI} \left(\frac{d^2 p}{d\theta^2} - \frac{p}{\mu} \right) + \frac{1+\mu}{\mu} \frac{R^3}{EI} \frac{d^2 m}{d\theta^2} \quad (9)$$

式(9)より w が求まれば式(1)~(6)より変位および施力の諸量が次の如く求められる。

$$\varphi = w' \quad (10a) \quad \bar{\psi} = -\frac{\mu}{1+\mu} w^{(4)} - \frac{1+2\mu}{1+\mu} w'' + \frac{\mu}{1+\mu} \frac{R^4}{EI} p + \frac{R^3}{EI} m \quad (10b)$$

$$M = -\frac{EI}{R^2} (w'' + \bar{\psi}) \quad (10c) \quad T = \frac{GJ}{R^2} (\bar{\psi}' - w') \quad (10d) \quad Q = -\frac{EI}{R^3} [w''' - \mu w' + (1+\mu) \bar{\psi}'] \quad (10e)$$

3 円形曲り梁の面外自由振動 円形曲り梁の単位長当りの質量を ρ とし、回転慣性を無視すれば自由振動時の荷重強度 p, m は $p = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, $m = 0$ と与えられる。これを式(9)に代入して円形曲り梁の面外自由振動の基本式が次のように得られる。

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\rho R^4}{EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w}{\mu} \right) = 0 \quad (11)$$

こゝで $w(\theta, t) = W(\theta) \sin \omega t$ とおき式(11)に代入すれば w の基準函数 W に関する次式を得る。

$$\frac{d^6 W}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 W}{d\theta^4} + (1-\lambda^4) \frac{d^2 W}{d\theta^2} + \frac{\lambda^4}{\mu} W = 0 \quad (12)$$

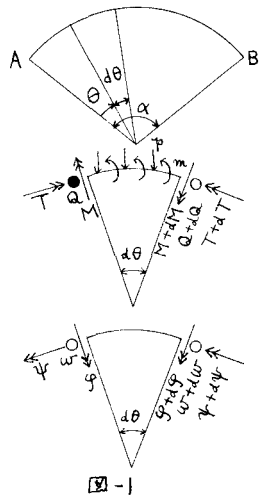


図-1

ただし $\lambda^4 = \rho \omega^2 R^4 / EI$, ω は円形曲り梁の固有角振動数である。式(12)の一般解は $0 < \frac{\lambda}{\mu} < 2.6$ の $\lambda^4 > 24.67$ の範囲で次式となる。

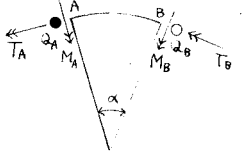
$$W(\theta) = C_1 \cosh X\theta + C_2 \sinh X\theta + C_3 \cosh Y\theta + C_4 \sinh Y\theta + C_5 \cos Z\theta + C_6 \sin Z\theta \quad (13)$$

こゝで、定数 X, Y, Z は次の各式から決定せられる。

$$X^4 + 2X^4 + (1 - \lambda^4)X^2 + \frac{\lambda^4}{\mu} = 0, Y^4 + 2Y^4 + (1 - \lambda^4)Y^2 + \frac{\lambda^4}{\mu} = 0, Z^4 - 2Z^4 + (1 - \lambda^4)Z^2 - \frac{\lambda^4}{\mu} = 0 \quad (X, Y, Z > 0) \quad (14)$$

4 円形曲り梁の面外振動たわみ角式

円形曲り梁の面外振動たわみ角式を誘導するに当り、2. 部材端におけるたわみおよび変位に因りて次の規約をもうける。



(1) 円弧の中心方向に進むたわみの回転方向を曲げモーメント M およびたわみ角 $\bar{\psi}$ の正の方向とする。

(2) 考える部材端と円弧の中心を結ぶ法線と部材端と中心に時計回りに 90° だけ回転させた接線方向に進むたわみの回転方向をたわみモーメント T およびたわみ角 $\bar{\psi}$ の正の方向とする。

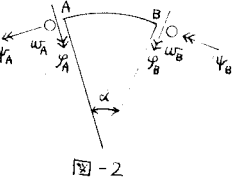


図-2

(3) 考える部材端のせん断力 Q は、他端と中心にして部材と時計回りに回転せるときを正とする。

(4) 鉛直たわみ w は下向きを正とする。

以上の符号規約を図示すれば 図-2 のごとくなる。次にたわみ角 $\bar{\psi}$ 、たわみ角 $\bar{\psi}$ 、曲げモーメント M 、たわみモーメント T およびせん断力 Q の規準函数とそれとを $\bar{\psi}, M, T$ および Q とすれば式(10a) ~ (10c) および (13) より次式を得る。

$$\begin{bmatrix} W \\ \bar{\psi} \\ \bar{\psi} \\ M/R/EI \\ T/R^3/EI \\ Q/R^3/EI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh X\theta & \sinh X\theta & \cosh Y\theta & \sinh Y\theta & \cos Z\theta & \sin Z\theta \\ X \sinh X\theta & X \cosh X\theta & Y \sinh Y\theta & Y \cosh Y\theta & -Z \sin Z\theta & Z \cos Z\theta \\ f_1 \cosh X\theta & f_1 \sinh X\theta & f_2 \cosh Y\theta & f_2 \sinh Y\theta & f_3 \cos Z\theta & f_3 \sin Z\theta \\ g_1 \cosh X\theta & g_1 \sinh X\theta & g_2 \cosh Y\theta & g_2 \sinh Y\theta & g_3 \cos Z\theta & g_3 \sin Z\theta \\ h_1 \sinh X\theta & h_1 \cosh X\theta & h_2 \sinh Y\theta & h_2 \cosh Y\theta & h_3 \sin Z\theta & h_3 \cos Z\theta \\ i_1 \sinh X\theta & i_1 \cosh X\theta & i_2 \sinh Y\theta & i_2 \cosh Y\theta & -i_3 \sin Z\theta & i_3 \cos Z\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$f_1 = -(\delta X^4 + \delta X^2 - \gamma \lambda^4), f_2 = -(\gamma Y^4 + \delta Y^2 - \gamma \lambda^4), f_3 = -(\gamma Z^4 - \delta Z^2 - \gamma \lambda^4), g_1 = \delta(X^4 + X^2 - \lambda^4), g_2 = \delta(Y^4 + Y^2 - \lambda^4), g_3 = \gamma(Z^4 - Z^2 - \lambda^4), h_1 = -X\{\delta X^4 + \delta X^2 + (1 - \delta \lambda^4)\}, h_2 = -Y\{\delta Y^4 + \delta Y^2 + (1 - \delta \lambda^4)\}, h_3 = Z\{\delta Z^4 - \delta Z^2 + (1 - \delta \lambda^4)\}, i_1 = \mu X\{X^4 + 2X^2 + (1 - \lambda^4)\}, i_2 = \mu Y\{Y^4 + 2Y^2 + (1 - \lambda^4)\}, i_3 = -\mu Z\{Z^4 + 2Z^2 - (1 - \lambda^4)\}, \gamma = \mu/(1 + \mu), \delta = (1 + 2\mu)/(1 + \mu)$$

したがって、部材端 A, B における諸変位および諸応力は式(15)に $\theta = 0$ および α とそれとを代入して次の各式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} W_A \\ \bar{\psi}_A \\ \bar{\psi}_A \\ W_B \\ \bar{\psi}_B \\ \bar{\psi}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & X & 0 & Y & 0 & Z \\ f_1 & 0 & f_2 & 0 & f_3 & 0 \\ \cosh X\alpha & \sinh X\alpha & \cosh Y\alpha & \sinh Y\alpha & \cos Z\alpha & \sin Z\alpha \\ X \sinh X\alpha & X \cosh X\alpha & Y \sinh Y\alpha & Y \cosh Y\alpha & -Z \sin Z\alpha & Z \cos Z\alpha \\ f_1 \cosh X\alpha & f_1 \sinh X\alpha & f_2 \cosh Y\alpha & f_2 \sinh Y\alpha & f_3 \cos Z\alpha & f_3 \sin Z\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_A R^2/EI \\ \bar{T}_A R^2/4J \\ \bar{Q}_A R^3/EI \\ \bar{M}_B R^2/EI \\ \bar{T}_B R^2/4J \\ \bar{Q}_B R^3/EI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 & 0 & -g_2 & 0 & -g_3 & 0 \\ 0 & -h_1 & 0 & -h_2 & 0 & -h_3 \\ 0 & i_1 & 0 & i_2 & 0 & i_3 \\ g_1 \cosh X\alpha & g_1 \sinh X\alpha & g_2 \cosh Y\alpha & g_2 \sinh Y\alpha & g_3 \cos Z\alpha & g_3 \sin Z\alpha \\ h_1 \sinh X\alpha & h_1 \cosh X\alpha & h_2 \sinh Y\alpha & h_2 \cosh Y\alpha & h_3 \sin Z\alpha & -h_3 \cos Z\alpha \\ i_1 \sinh X\alpha & i_1 \cosh X\alpha & i_2 \sinh Y\alpha & i_2 \cosh Y\alpha & -i_3 \sin Z\alpha & i_3 \cos Z\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (17)$$

式(16) (17)より積分定数 $C_1, C_2, \dots, C_6$ を消去すれば円形曲り梁の面外振動方程式が得られ次式となる。

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_A R^2/EI \\ \bar{T}_A R^2/4J \\ \bar{Q}_A R^3/EI \\ \bar{M}_B R^2/EI \\ \bar{T}_B R^2/4J \\ \bar{Q}_B R^3/EI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} & I_{14} & I_{15} & I_{16} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} & I_{24} & I_{25} & I_{26} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & I_{34} & I_{35} & I_{36} \\ I_{41} & I_{42} & I_{43} & I_{44} & I_{45} & I_{46} \\ I_{51} & I_{52} & I_{53} & I_{54} & I_{55} & I_{56} \\ I_{61} & I_{62} & I_{63} & I_{64} & I_{65} & I_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_A \\ \Phi_A \\ \Psi_A \\ W_B \\ \Phi_B \\ \Psi_B \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} I_{1n} \\ I_{2n} \\ I_{3n} \\ I_{4n} \\ I_{5n} \\ I_{6n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 & 0 & -g_2 & 0 & -g_3 & 0 \\ 0 & -h_1 & 0 & -h_2 & 0 & -h_3 \\ 0 & i_1 & 0 & i_2 & 0 & i_3 \\ g_1 \cosh X\alpha & g_1 \sinh X\alpha & g_2 \cosh Y\alpha & g_2 \sinh Y\alpha & g_3 \cos Z\alpha & g_3 \sin Z\alpha \\ h_1 \sinh X\alpha & h_1 \cosh X\alpha & h_2 \sinh Y\alpha & h_2 \cosh Y\alpha & h_3 \sin Z\alpha & -h_3 \cos Z\alpha \\ i_1 \sinh X\alpha & i_1 \cosh X\alpha & i_2 \sinh Y\alpha & i_2 \cosh Y\alpha & -i_3 \sin Z\alpha & i_3 \cos Z\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \\ a_{5n} \\ a_{6n} \end{bmatrix}$$

($n = 1, 2, \dots, b$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & X & 0 & Y & 0 & Z \\ f_1 & 0 & f_2 & 0 & f_3 & 0 \\ \cosh X\alpha & \sinh X\alpha & \cosh Y\alpha & \sinh Y\alpha & \cos Z\alpha & \sin Z\alpha \\ X \sinh X\alpha & X \cosh X\alpha & Y \sinh Y\alpha & Y \cosh Y\alpha & -Z \sin Z\alpha & Z \cos Z\alpha \\ f_1 \cosh X\alpha & f_1 \sinh X\alpha & f_2 \cosh Y\alpha & f_2 \sinh Y\alpha & f_3 \cos Z\alpha & f_3 \sin Z\alpha \end{bmatrix}^{-1}$$

5 円形曲り梁面外振動方程式の適用例

(1) 両端ヒンジ円形曲り梁 ヒンジ端においては、鉛直たわみ W およびねじれ角歪が無く、変位とねじれはたわみ角歪のみがあるものとすれば式(18)の円形曲り梁振動方程式より両端ヒンジの場合の円形曲り梁の端モーメント M_A, M_B は次式のとく書き下される。

$$\bar{M}_A = \frac{EI}{R^2} (I_{12} \Phi_A + I_{15} \Phi_B), \quad \bar{M}_B = \frac{EI}{R^2} (I_{42} \Phi_A + I_{45} \Phi_B)$$

また、部材の両端 A, B における節点方程式としては $\bar{M}_A = 0, \bar{M}_B = 0$ が成立するので以上4式より両端ヒンジの円形曲り梁の自由振動の固有値方程式が得られ次式となる。すなわち

$$\begin{vmatrix} I_{12} & I_{15} \\ I_{42} & I_{45} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{すなわち} \quad I_{12} \cdot I_{45} - I_{15} \cdot I_{42} = 0$$

(2) 一端自由他端固定円形曲り梁 A 端が自由端、 B 端が固定端とすれば A 端においては変位と

2 鉛直たわみ W 、たわみ角 α およびねじれ角 φ があり、B 端においては変位は生じない。また A 端における曲げモーメント $\bar{M}_A$ およびせん断力 $\bar{Q}_A$ は次式で表わされるが自由端におけるこれらの値は全て 0 に等しい。すなわち

$$\bar{M}_A = \frac{EI}{R^2} (I_{11} W_A + I_{12} \varphi_A + I_{13} \varphi_A) = 0, \quad \bar{T}_A = \frac{GJ}{R^2} (I_{21} W_A + I_{22} \varphi_A + I_{23} \varphi_A) = 0, \quad \bar{Q}_A = \frac{EI}{R^2} (I_{31} W_A + I_{32} \varphi_A + I_{33} \varphi_A) = 0$$

以上の 3 式よりこの場合の自由振動の固有値方程式が得られ次式となる。

$$\begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{すなわち} \quad \begin{aligned} & I_{11} \cdot I_{22} \cdot I_{33} + I_{21} \cdot I_{32} \cdot I_{13} + I_{31} \cdot I_{12} \cdot I_{23} \\ & - (I_{31} \cdot I_{22} \cdot I_{13} + I_{11} \cdot I_{32} \cdot I_{23} + I_{21} \cdot I_{12} \cdot I_{33}) = 0 \end{aligned}$$

(3) 一端にヒンジ他端固定の円形曲り梁 A 端がヒンジ端、B 端が固定端とすれば A 端においてたわみ角 φ_A のみが存在し、B 端においては変位はない。次に式(18)より A 端の曲げモーメント $\bar{M}_A$ を書き下せば次式が得られる。すなわち、 $\bar{M}_A = \frac{EI}{R^2} \cdot I_{12} \cdot \varphi_A$ しかも A 端はヒンジ端であるからこの値は 0 になければならない。したがってこの場合の自由振動の固有値方程式として、 $I_{12} = 0$ 、を得る。

(4) 中間支座を有する 2 スパン連続円形曲り梁 中間ヒンジを B、両端をとれとれ A、C とすれば円形曲り梁の面外振動方程式(18)より端モーメント式として次の各式を得る。

$$\bar{M}_{AB} = \frac{EI}{R^2} (I_{12} \varphi_A + I_{15} \varphi_B), \quad \bar{M}_{BA} = \frac{EI}{R^2} (I_{42} \varphi_A + I_{45} \varphi_B), \quad \bar{M}_{BC} = \frac{EI}{R^2} (I_{12} \varphi_B + I_{15} \varphi_C), \quad \bar{M}_{CB} = \frac{EI}{R^2} (I_{42} \varphi_B + I_{45} \varphi_C)$$

また節点 A、B、C におけるモーメントのつり合いを考えれば次式が得られる。

$$\bar{M}_{AB} = 0, \quad \bar{M}_{BA} + \bar{M}_{BC} = 0, \quad \bar{M}_{CB} = 0$$

以上の 6 式よりこの場合の固有値方程式として次式が得られる。すなわち

$$\begin{vmatrix} I_{12} & I_{15} & 0 \\ I_{42} & I_{45} + I_{12} & I_{15} \\ 0 & I_{42} & I_{45} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{すなわち} \quad \begin{aligned} & (I_{12} + I_{45}) \begin{vmatrix} I_{12} & I_{15} \\ I_{42} & I_{45} \end{vmatrix} = 0 \\ & I_{12} + I_{45} = 0 \\ & I_{12} \cdot I_{45} - I_{15} \cdot I_{42} = 0 \end{aligned}$$

6 数値計算 5 において得た各種境界条件を有する円形曲り梁及び 2 スパン連続円形曲り梁の自由振動の固有値方程式を中心角 $\alpha = 60^\circ$ の場合を例にとり数値計算を行い固有値入と算定した。得られた結果を表-1 に示す。

7 あとがき 振動方程式は微分方程式と個々に直接解くのは異なり一貫した取扱手法で不静定構造に広く適用しうる多用性を特色とするものであり本研究では円形曲り梁の面外振動の算例に限ったが直線材の振動方程式を併用すれば各種格子やラーメン構造の振動解が可能となる。

2.735	2.297		2.735
	5.142	3.958	3.958
5.864			5.864
	8.172	6.647	6.647
8.909		9.674	8.909
	11.188		9.674
11.930		12.690	11.930
			12.690

表-1 λ -値 ($\lambda^4 = \rho \omega^2 R^4 / EI$)

参考文献 (1) 山崎徳也、崎山毅「円形曲り梁の面外自由振動」土木学会西部支部研究発表会 昭42.1.30

(2) 平井敦、深沢泰晴「曲線橋の振動問題は題の解析」第19回土木学会年次学術講演会

(3) 小松定夫、中井博「曲線形橋の自由振動に関する研究」土木学会論文集 第136号