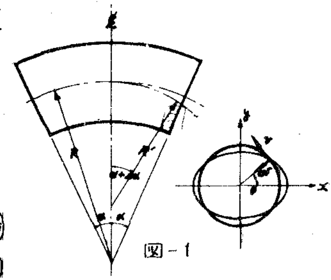
I ― 4

薄肉部材のエルボー部における曲げによる現象

名古屋工業大学　正員　荒井利一郎
〃　大学院　学生員　○浜島良吉

物体が外力によって弾性的な変形をなしているときには、外力と弾性的に生じた内力とは、普通安定な釣合となっているが、ある種の変形様式では外力がある大きさ以上になると、安定釣合状態たり得ず、その先では別の変形様式が安定な釣合となるか、或は急激な大変形が起ったり破壊したりすることがある。本論文では後者を論じ、薄肉構造部材の彎曲部に曲げモーメントMが作用した場合について、曲円管に対するカルマンの微小変形理論を拡張した有限変形理論を考え、一様偏平を仮定した場合に円形、楕円形、矩形断面について論じ、又偏平化が材軸線彎曲部の中央で著るしいとして、力学的に一層正しき事実を押入することにより、円形、楕円形断面の薄肉構造部材の弾性安定を、飛移り、座屈の現象に対して論ずる。ここで応力と歪との間の関係は線型とし、応力自身の間の釣合は変形前の状態で考えるが、変位と歪との関係において、材軸方向の歪ε_1に対して有限変形を考え、又曲げモーメントMと曲率変化量cとの関係は位置エネルギーが極小となるべく定める。これは変形後の断面形状にて外力Mとの釣合を考えるのと同意である。この意味でも変形前の断面形状にて外力との釣合を考えているカルマンの論文とは異なる。すなわち；—　$\varepsilon_1 = cy - \Delta y/R$,（$\Delta y/R$：偏平化による歪の減少量）


図－1

$\Delta y = w\sin\theta - v\cos\theta$,　$W = \frac{Et}{2}\int_0^{2\pi}\varepsilon_1^2 dS + \frac{D}{2}\int_0^{2\pi}K_2^2 dS$,（$K_2$：断面の曲率変化量）

これより位置エネルギーΠは　$\Pi = W - M\cdot c$　又位置エネルギー極小なることより　$\frac{\partial\Pi}{\partial c}=0$、これより

$M = \frac{\partial W}{\partial c} = Et\int_0^{2\pi}\varepsilon_1 y\,dS = \int_0^{2\pi}T_1 y\,dS$,（周方向には伸びなし変形：$dS'=dS$）　ここで$\varepsilon_1$に有限変形を考え

$\varepsilon_1 = cy - \frac{\Delta y}{R} = c(y-\Delta y) - \frac{\Delta y}{R}$ --------(1)　とすると、$M = \frac{\partial W}{\partial c} = Et\int_0^{2\pi}\varepsilon_1 (y-\Delta y)dS = \int_0^{2\pi}T_1(y-\Delta y)dS$

こうして軸方向歪ε_1を(1)式にて表わし、又偏平量の自乗$(\Delta y)^2$をも考慮することにより、カルマンのMとCの関係$M = EIC\left(1-\frac{9}{10+12(Rt/a^2)^2}\right)$が一次式で表わされるのに対して、同じく一様偏平なる仮定を入れた場合次式で表わされ図-5のごとくなる。（ここで$w = A\sin 2\theta$としAは$\frac{\partial W}{\partial A}=0$より求められる）

$M = EI\left[c + 1.5\left(2c+\frac{1}{R}\right)\frac{A}{a} + 2.5\left(c+\frac{1}{R}\right)\left(\frac{A}{a}\right)^2\right]$,　　$\frac{A}{a} = -1.5c\left(c+\frac{1}{R}\right)\Big/\left\{2.5\left(c+\frac{1}{R}\right)^2 + 3(1-\nu^2)\left(\frac{t}{a}\right)^2\cdot\frac{1}{a^2}\right\}$

微小変形理論においては外力によって生ずる変形及び応力は外力に対して線型であり、安定な釣合となる。しかし有限変形理論では外力によって生ずる変形は外力に対して必ずしも線型とは限らず、又常に安定な釣合であるとはいえない。又ある外力の状態に対して唯一つの変形状態しかないということは成立たなくなってしまう。今の場合$\frac{t}{a}=\frac{1}{20}$, $\frac{R}{a}=10$の場合についてMとCの関係を図示すれば図4aのごとくなり$C_1\sim A_2$の部分での釣合状態はない。これは$\frac{\partial\Pi}{\partial c} = \frac{\partial W}{\partial c} - M = 0$,　$\frac{\partial^2\Pi}{\partial c^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial c^2} = \frac{\partial M}{\partial c}$, なることより$C_1\sim A_2$では$\frac{\partial^2\Pi}{\partial c^2} = \frac{\partial M}{\partial c} < 0$となり不安定なることがわかる。又図4-bからこの場合の弾性安定現象は飛移り現象と解される。ここで直の管においても飛移り現象のみでなく$\lambda = \frac{Rt}{a^2}$の変化により座状の現象をもすする。Brazierは直円管に対して座状のみの現象を導いたが、これは偏平量の自乗$(\Delta y)^2$を無視したことによる。ここでは偏平化が材軸線に沿って一様であると仮定したのであるが図2より偏平化は中央にて著しいことが容易に推察され得る。今任意断面形状を有する薄肉部材に対し微小変形理論により釣合式を考え、適当な簡単化により次の4階複素微分方程式を得る。（R_2：断面の曲率半径）

$R_2 \Delta\Delta\Phi + 4i\varepsilon^2\Phi'' = 0$, $\left(\Delta\Delta\Phi = \frac{\partial^4\Phi}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial z^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial s^4},\ \Phi'' = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)$ --- (2)

ここで $\Phi = w + iKF$, $\left(\varepsilon_1{}^2 = \frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{2t},\ K = \frac{2\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{Et^2}\right)$, 又 $R_2 = const$ とすればZernaが直円管に対して得た式となる。こうして直の管の釣合式より変位，応力を求め．軸方向の歪に対しては有限変形を考えた(1)式を用いることにより．煩雑な曲管の釣合式を解くことなく，しかも有限変形理論にて精度の良い結果を得ることができる。楕円形断面に対して，変形後断面は別の楕円に変形するとし、Φを周長Sの関数として次式で表わす．

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \cos\frac{2n\pi s}{s_0} e^{\frac{m z}{a}},\ (S_0 : 半周長) \cdots (3)$$

ここで $R_2 = \frac{a^2}{b}\sum_{k=0}^{\infty} r_k \cos\frac{2k\pi s}{s_0}$ ---------- (4) なるSの関数で表わし．(3), (4)を(2)式に代入しΦを求めれば

$$\Phi = \cos\frac{2\pi s}{s_0}\left\{(C_1^0 + iC_2^0)e^{-\frac{\alpha_1 z}{a}}\left(\cos\frac{\beta_1 z}{a} + i\sin\frac{\beta_1 z}{a}\right) + (C_3^0 + iC_4^0)e^{-\frac{\alpha_2 z}{a}}\left(\cos\frac{\beta_2 z}{a} - i\sin\frac{\beta_2 z}{a}\right)\right\}$$

ここでw_2, $w_3 \cdots$ はw_1に比して無視しうる量であるので$n=1$のみにて計算し、又中央扁平なる仮定より発散項$e^{+\frac{\alpha_1 z}{a}}$, $e^{+\frac{\alpha_2 z}{a}}$は零とする。このため境界条件は$z=0$にて$(u)_{z=0}=0$, $(w')_{z=0}=0$, $(\bar{S}_1)_{z=0}=0$ の3個であり，$\bar{S}_1$は置換面内セン断力であるが，$(\bar{S}_1)_{z=0}=0$ なる条件は周方向の伸びなし変形の条件と一致する．(本論文では材軸線,及び周方向には伸びなし変形を考えている)．ここで4個の未知数に対し3個の境界条件しかなく．残りの1つは$\frac{\partial W}{\partial C_1^0}=0$より歪エネルギーが極小となるべく定められる。又MとCの関係は位置エネルギー極小の条件より．

$$\frac{aM}{EI_0} = \Pi\left\{aC - \lambda_1\left(2aC + \frac{a}{R}\right)\left(\frac{a}{L}\right)\frac{C_1^0}{a} + \lambda_2\left(aC + \frac{a}{R}\right)\frac{a}{L}\left(\frac{C_1^0}{a}\right)^2\right\}$$

$$\frac{C_1^0}{a} = -\frac{\lambda_5\left\{(aC)^2 + \frac{a}{R}aC\right\}}{\lambda_3\left(aC + \frac{a}{R}\right)^2 + \lambda_4}, \quad (I_0 = a^3 t\pi,\ I = I_0\Pi,\ 2L;管の長さ)$$

この結果を図-5,6,7に示す

参考文献：(1) Theory of Elastic Thin Shells: AL. Gol'denveizer

(2) Ueber die Formänderung dünnwandiger Rohre, ins besondere federnder Aus-gleichrohre: Vereines deutchen Ingenieure 1911 P1891 V. Kármán

(3) 薄肉筒の弾性安定について：日本航空学会誌 7巻58号 流谷 巌

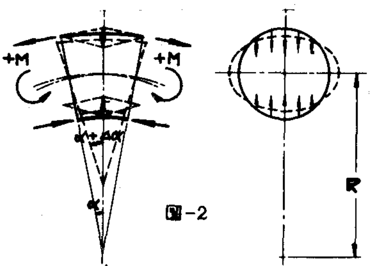


図-2

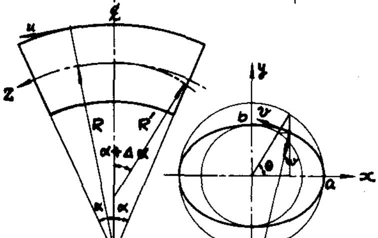


図-3

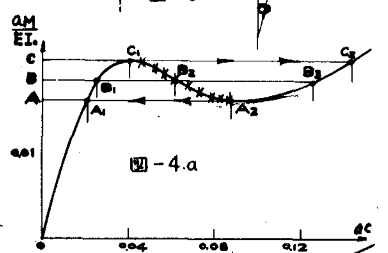


図-4.a

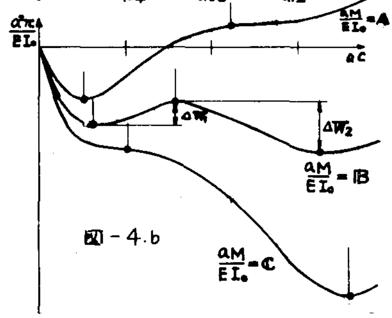


図-4.b

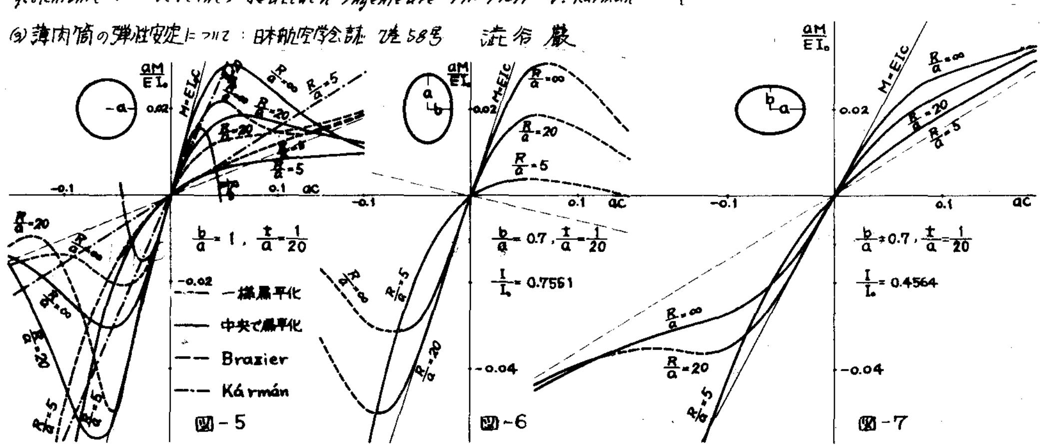


図-5 図-6 図-7