

I-3 非正六角形孔と有する板の孔縁応力

九州大学工学部 正員 山崎 徳也
 大学院 学員 後藤忠之輔
 鹿島建設K.K. 正員 岡田 実

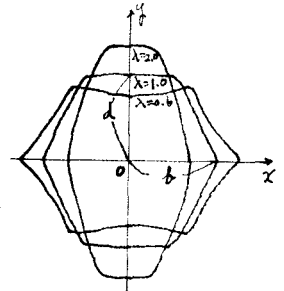
1 緒言 さきに著者は正六角形孔と有する板の孔縁応力について論じたが、本論ではこれをさらに発展させ、形状に一般性をもたせる非正六角形孔と有する板を対象とし、面内荷重として引張力、せん断力あるいは曲げモーメントを受ける場合に孔縁および直角座標軸上の応力と二次元弾性問題として求める。孔縁応力については孔の形状との関係と調べ、いかなる形状のとき最小の孔縁応力がえられるかを考察し、ついで軸上の点の応力により本解法の有孔梁への適用性と検討した。

2 近似六角形の式 直角座標の原点と中心とし一辺が y 軸に直交するとき近似六角形の式は次のごとく表わされる。(図-1参照)

$$\begin{cases} x = b_0 \{ (e^\alpha + a_1 e^{-\alpha}) \cos \beta + a_5 e^{-\alpha} \cos 5\beta \} \\ y = b_0 \{ (e^\alpha - a_1 e^{-\alpha}) \sin \beta - a_5 e^{-\alpha} \sin 5\beta \} \end{cases} \quad (1)$$

ここに b_0 : 長さの単位をもつ任意の正数, α : $0 \leq \alpha < \infty$, β : $-\pi \leq \beta \leq \pi$
 また係数 a_1 および a_5 は b, d を図-1のごとくとり(2)により次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{b(1+\lambda)} \left\{ 5(1-\lambda) - \sqrt{(1+\lambda)^2 + 2\lambda(11-48\sigma/\pi)} \right\}, & a_5 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda} a_1, \\ \text{ここで } \lambda &= \frac{d}{b} & \sigma &= \frac{\pi b_0^2}{4b^2\lambda} (1 - a_1^2 - 5a_5^2) \end{aligned}$$



本論において取扱う六角形孔は式(1)において $\alpha=0$ とおき、 λ と先ず $b_0=1, \sigma=0.77$ (図-1)を用い種々の λ 値に対してその形状を示せば図-1のごとくえられる。この σ 値に対しては $2.0 \geq \lambda \geq 0.5$ の範囲で式(1)を適用できる。

3 応力の一般式および境界条件式 直交曲線座標における応力の一般式は Airy の応力函数を χ として次のごとく表わされる。

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{1}{b_0^2} \left\{ J \frac{\partial^2 \chi}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \frac{\partial J}{\partial \alpha} - \frac{\partial \chi}{\partial \beta} \frac{\partial J}{\partial \beta} \right) \right\} \\ \sigma_\beta &= \frac{1}{b_0^2} \left\{ J \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} \frac{\partial J}{\partial \beta} - \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right) \right\} \\ \alpha\beta &= \frac{1}{b_0^2} \left\{ -J \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} \frac{\partial J}{\partial \alpha} + \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \frac{\partial J}{\partial \beta} \right) \right\} \\ \text{ここで } J &= \frac{1}{b_0^2} \left\{ \left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

よって χ は基礎方程式 $\nabla^4 \chi = 0$ を満足すべく、この式の本論に適する一般解を式(1)を用いて求める。これは次式のごとくなる。

$$\begin{aligned} \chi &= A_0 \alpha + B_0 \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{n\alpha} + B_n e^{-n\alpha}) \frac{\sin}{\cos} n\beta + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n [e^{(n+1)\alpha} \frac{\sin}{\cos} (n-1)\beta + a_1 e^{(n-1)\alpha} \frac{\sin}{\cos} (n+1)\beta \\ &\quad + a_5 e^{(n-5)\alpha} \frac{\sin}{\cos} (n+5)\beta] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} D_n [e^{-(n+1)\alpha} \frac{\sin}{\cos} (n+1)\beta + a_1 e^{-(n-1)\alpha} \frac{\sin}{\cos} (n-1)\beta + a_5 e^{-(n-5)\alpha} \frac{\sin}{\cos} (n-5)\beta] \\ &\quad + (E_1 \alpha + E_2 \beta) \{ (e^\alpha + a_1 e^{-\alpha}) \cos \beta + a_5 e^{-\alpha} \cos 5\beta \} + (G_1 \alpha + G_2 \beta) \{ (e^\alpha - a_1 e^{-\alpha}) \sin \beta - a_5 e^{-\alpha} \sin 5\beta \} \end{aligned} \quad (4)$$

ここに $A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n, E_1, E_2, G_1, G_2$ は孔縁における境界条件より決定される未定常数である。

有孔板が一様引張力、せん断力、曲げモーメントを受けるときの応力函数は一般に次のごとく表わされる。

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\alpha) \frac{\sin}{\cos} n\beta \quad (5)$$

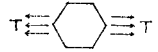
ここで χ_0 は孔のない場合の応力函数であり、 χ_1 は $\chi = \chi_0 + \chi_1$ により孔縁の境界条件を満足し、無限遠では χ_1 のみを用いて $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \alpha\beta$ が消失するとき函数である。孔縁の境界条件 $(\sigma_\alpha)_{\alpha=0} = (\sigma_\beta)_{\alpha=0} = 0$ (式(5)を用いて) 次のごとく変形される。

$$\alpha = 0: \text{おいて } F'_0 = 0, F'_n = 0, F'_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

式(4)を用いた孔縁応力 $(\beta\beta)_{\alpha=0}$ は次式の二と簡単形式で表わされる。

$$(\beta\beta)_{\alpha=0} = \frac{1}{b_0^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} \quad (7)$$

4. 無限遠で非正六角形孔の一边に平行に…様な引張力 T の作用する場合(図-2参照)



孔の中心の場合応力函数 χ_0 は式(1)の直交曲線座標を用いて次式に与えられる。

$$\chi_0 = \frac{T}{2} y^2 = \frac{T b_0^2}{2} \left\{ \frac{1}{2} (e^{2\alpha} - 2a_1 + a_1^2 e^{-2\alpha} + a_5^2 e^{-10\alpha}) - \frac{1}{2} (e^{2\alpha} - 2a_1 + a_1^2 e^{-2\alpha}) \cos 2\beta \right. \\ \left. - a_5 (e^{-4\alpha} - a_1 e^{-6\alpha}) \cos 4\beta + a_5 (e^{-4\alpha} - a_1 e^{-6\alpha}) \cos 6\beta - \frac{1}{2} a_5^2 e^{-10\alpha} \cos 10\beta \right\} \quad (8)$$

図-2

一方 χ_1 は $\alpha = \infty$ において $\frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} = 0, \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} = 0$ となる二と式(8)を参照して式(4)の中より

選定される。すなわち

$$\chi_1 = \frac{T b_0^2}{2} \left\{ (A_0 \alpha + \frac{1}{2} a_1 e^{-2\alpha} D_1 + \frac{1}{2} a_5 e^{-10\alpha} D_5) + \left\{ B_2 e^{-2\alpha} + \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{2} (a_1 e^{-4\alpha} + a_5 e^{-8\alpha}) D_3 + \frac{1}{2} a_5 e^{-12\alpha} D_7 \right\} \cos 2\beta \right. \\ \left. + \left\{ B_4 e^{-4\alpha} + \frac{1}{2} a_5 e^{-6\alpha} D_1 + \frac{1}{2} a_1 e^{-6\alpha} D_5 + \frac{1}{2} a_5 e^{-14\alpha} D_9 \right\} \cos 4\beta + \left\{ B_6 e^{-6\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} e^{-4\alpha} D_5 + \frac{1}{2} a_1 e^{-8\alpha} D_7 \right\} \cos 6\beta + \left\{ B_8 e^{-8\alpha} + \frac{1}{2} e^{-6\alpha} D_7 + \frac{1}{2} a_1 e^{-10\alpha} D_9 \right\} \cos 8\beta \right. \\ \left. + \left\{ B_{10} e^{-10\alpha} + \frac{1}{2} e^{-8\alpha} D_9 \right\} \cos 10\beta \right\} \quad (9)$$

式(8),(9)を代入して

$$\chi = \frac{T b_0^2}{2} (F_0 + F_2 \cos 2\beta + F_4 \cos 4\beta + F_6 \cos 6\beta + F_8 \cos 8\beta + F_{10} \cos 10\beta)$$

すなわち $F_0, F_2, \dots, F_{10}$ は α, a_1, a_5 および未定係数 $A_0, B_2, B_4, \dots, D_1, D_3, \dots$ の函数である。

未定係数は境界条件式(6)により求められ $F_0 = F_8 = F_{10} = 0$ となり結局問題の χ は次式の二と求められる。

$$\chi = \frac{T b_0^2}{2} (F_0 + F_2 \cos 2\beta + F_4 \cos 4\beta) \quad (10)$$

$$\therefore F_0 = \frac{1}{2} (e^{2\alpha} - 2a_1 + a_1^2 e^{-2\alpha} - a_5^2 e^{-10\alpha}) + (-1 + a_1^2 - 5a_5^2 + a_1 N_T) \alpha + \frac{1}{2} a_1 N_T e^{-2\alpha}$$

$$F_2 = -\frac{1}{2} (e^{2\alpha} - 2a_1) - \left\{ \frac{1}{2} + a_5 (a_1 + 2a_5) N_T \right\} e^{-2\alpha} + \frac{1}{2} N_T + \frac{1}{2} a_5 N_T (a_1 e^{-4\alpha} + a_5 e^{-8\alpha})$$

$$F_4 = \frac{1}{2} a_5 N_T e^{-2\alpha} - a_5 N_T e^{-4\alpha} + \frac{1}{2} a_5 N_T e^{-6\alpha} \quad (11)$$

$$N_T = \frac{2 - 2a_1}{1 - a_1 a_5 - 3a_5^2}$$

また式(1)と式(3)に代入して拡大率 J は次の二と求まる。

$$J = (e^{2\alpha} + a_1^2 e^{-2\alpha} + 5a_5^2 e^{-10\alpha}) - 2a_1 \cos 2\beta + 10a_1 a_5 e^{-6\alpha} \cos 4\beta - 10a_5 e^{-4\alpha} \cos 6\beta \quad (12)$$

さらに

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= 2e^{2\alpha} - 2a_1^2 e^{-2\alpha} - 50a_5^2 e^{-10\alpha} - 60a_1 a_5 e^{-6\alpha} \cos 4\beta + 40a_5 e^{-4\alpha} \cos 6\beta \\ \frac{\partial J}{\partial \beta} &= 4a_1 \sin 2\beta - 40a_1 a_5 e^{-6\alpha} \sin 4\beta + 60a_5 e^{-4\alpha} \sin 6\beta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(10)より χ の α, β に関する1階および2階の微分係数と式(13)の二と次式で与えられる。

$$\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} = \frac{T b_0^2}{2} (F'_0 + F'_2 \cos 2\beta + F'_4 \cos 4\beta), \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} = \frac{T b_0^2}{2} (F''_0 + F''_2 \cos 2\beta + F''_4 \cos 4\beta)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \beta} = -T b_0^2 (F_2 \sin 2\beta + 2F_4 \sin 4\beta), \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \beta^2} = -T b_0^2 (2F_2 \cos 2\beta + 8F_4 \cos 4\beta)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha \partial \beta} = -T b_0^2 (F'_2 \sin 2\beta + 2F'_4 \sin 4\beta) \quad (14)$$

すなわち $F'_0 \sim F'_4$ および $F''_0 \sim F''_4$ は式(11)の $F_0 \sim F_4$ を α に2階微分して

2階微分係数に与えられる。以上より式(12)~式(14)と式(2)に代入

すれば所要の σ, β, σ が求まるが特に孔縁 $\alpha=0$ において

式(7)より次の二と与えられる。

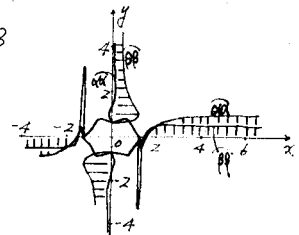


図-3 $\lambda = 0.6$

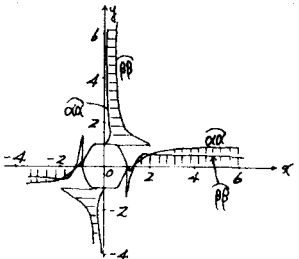


図-4 $\lambda = 1.0$

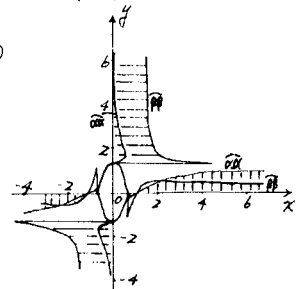


図-5 $\lambda = 2.0$

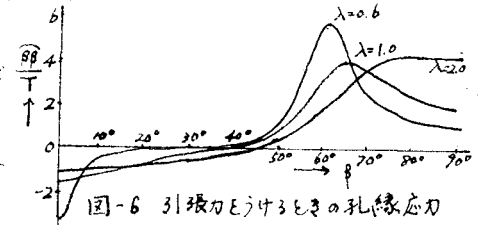


図-6 引張力 T を受けるときの孔縁応力

$$(\overline{P\overline{P}})_{\alpha=0} = \frac{T[(1+a_1^2-25a_5^2+a_1N_1)-2\{1-a_5(b+a_5)N_1\}\cos 2\beta+2a_5N_1\cos 4\beta]}{(1+a_1^2+25a_5^2)-2a_1\cos 2\beta+10a_1a_5\cos 4\beta-10a_5\cos 6\beta}$$

図-3, 4, 5 は x, y 軸上の $\overline{\alpha\alpha}, \overline{\beta\beta}$ を、また図-6 は孔縁応力 $(\overline{P\overline{P}})_{\alpha=0}$ を $\lambda = 0.6, 1.0, 2.0$ の値に對し図示したものである。

5. 無限遠におい x - y 軸せん断力 S が作用する場合 (図-7 参照)

χ_0 は式(1)を用いて 2 次式で近似される。

$$\chi_0 = -Sx_0y = Sb_0^2 \left\{ -\frac{1}{2}(e^{\alpha}-a_5^2e^{-2\alpha})\sin 2\beta + a_5e^{-4\alpha}\sin 4\beta + a_5a_5e^{-6\alpha}\sin 6\beta + \frac{1}{2}a_5^2e^{-10\alpha}\sin 10\beta \right\} \quad \text{図-7}$$

これに對する χ_1 は上式を参照して式(4)の中より選んだ α によつて必要の応力函数 χ は 3 次式で近似される。

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 = Sb_0^2 (F_2 \sin 2\beta + F_4 \sin 4\beta + F_6 \sin 6\beta + F_8 \sin 8\beta + F_{10} \sin 10\beta)$$

未定常数を式(6)より求め、式(4)に代入すれば

$$\chi = Sb_0^2 (F_2 \sin 2\beta + F_4 \sin 4\beta) \quad (5)$$

$$\therefore F_2 = -\frac{1}{2}e^{2\alpha} \left\{ \frac{1}{2} - (1-a_5a_5+a_5^2)N_5 \right\} e^{-2\alpha} + N_5 - a_5a_5N_5e^{-6\alpha} + a_5^2N_5e^{-8\alpha}$$

$$F_4 = -a_5N_5e^{-2\alpha} + 2a_5^2N_5e^{-4\alpha} - a_5^3N_5e^{-6\alpha}$$

$$N_5 = \frac{1}{1+a_5a_5-3a_5^2}$$

式(5)を用いて 4. と同様の演算により $\overline{\alpha\alpha}, \overline{\beta\beta}, \overline{\alpha\beta}$ を求める。特に $\alpha=0$ の

孔縁応力を示せば 2 次式の結果となる。

$$(\overline{P\overline{P}})_{\alpha=0} = \frac{-4S[(1+3a_5a_5-12a_5^2)N_5\sin 2\beta+2a_5N_5\sin 4\beta]}{(1+a_1^2+25a_5^2)-2a_1\cos 2\beta+10a_1a_5\cos 4\beta-10a_5\cos 6\beta}$$

図-8 ~ 10 は x, y 軸上の $\overline{\alpha\alpha}$ を、図-11 は孔縁応力 $(\overline{P\overline{P}})_{\alpha=0}$ を $\lambda = 0.6, 1.0$ および 2.0 の値に對し図示したものである。なお x, y 軸上の $\overline{\beta\beta}$ は微小な影響なし。

6. Deep beam の(図)内に均一な曲げモーメントが作用する場合 (図-12 参照)

$$\chi_0 = \frac{M}{6I} y^3 = \frac{Mb_0^3}{24I} \left\{ (3e^{3\alpha}-9a_5e^{\alpha}+9a_5^2e^{-\alpha}-3a_5^3e^{-3\alpha}+6a_5^2e^{-9\alpha}-6a_5a_5^2e^{-11\alpha})\sin \beta \right. \\ + (e^{3\alpha}+3a_5e^{\alpha}-3a_5^2e^{-\alpha}+a_5^3e^{-3\alpha}-6a_5a_5^2e^{-5\alpha}+3a_5^2a_5^2e^{-7\alpha})\sin 3\beta \\ - (6a_5e^{-3\alpha}-12a_5a_5^2e^{-5\alpha}+6a_5^2a_5^2e^{-7\alpha}+3a_5^3e^{-15\alpha})\sin 5\beta + (3a_5e^{-3\alpha} \\ - 6a_5a_5^2e^{-5\alpha}+3a_5^2a_5^2e^{-7\alpha})\sin 7\beta + (3a_5^2e^{-9\alpha}-3a_5a_5^2e^{-11\alpha})\sin 9\beta \\ \left. - (3a_5e^{-9\alpha}-3a_5a_5^2e^{-11\alpha})\sin 11\beta + a_5^3e^{-15\alpha}\sin 15\beta \right\}$$

一方 χ_1 は上式を参照して式(4)の中より選んだ α によつて、結果は 2 次式で近似される。

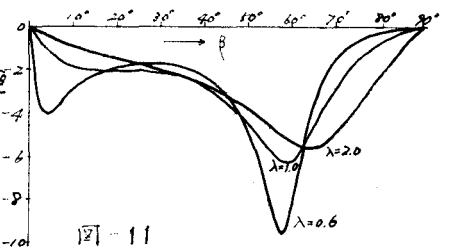
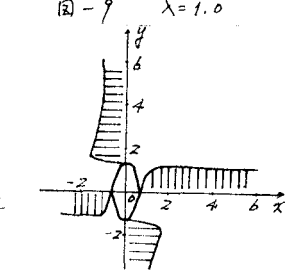
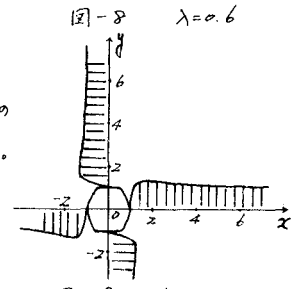
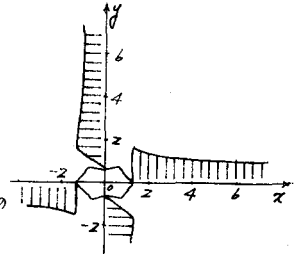
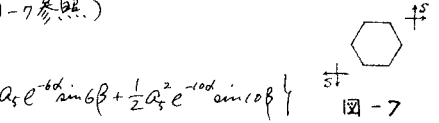
$$\chi = \chi_0 + \chi_1 = \frac{Mb_0^3}{24I} [F_1 \sin \beta + F_3 \sin 3\beta + F_5 \sin 5\beta + F_7 \sin 7\beta + F_9 \sin 9\beta \\ + F_{11} \sin 11\beta + F_{13} \sin 13\beta + F_{15} \sin 15\beta]$$

未定常数を式(6)より求めれば $F_7 = F_{11} = F_{13} = F_{15} = 0$ となり、結局

$$\chi = \frac{Mb_0^3}{24I} [F_1 \sin \beta + F_3 \sin 3\beta + F_5 \sin 5\beta + F_7 \sin 7\beta] \quad (16)$$

$\therefore$

$$F_1 = (-3-3a_5^3+24a_5a_5^2-30a_5^2+a_1N_5)e^{\alpha} + (3-6a_5^3-30a_5a_5^2+36a_5^2 \\ - 2a_1N_5)e^{-\alpha} - (3a_5^3-a_1N_5)e^{-3\alpha} + 6a_5a_5^2e^{-5\alpha} - 6a_5^2e^{-11\alpha}$$



せん断力を受けるときの孔縁応力

$$F_3 = -e^{3\alpha} + 3A_1 e^{\alpha} - (3A_1^2 - N_B) e^{-\alpha} + \{1 - 3A_1 + 3A_1^2 + 3A_1^2 A_5 - (1 - A_5) N_B\} e^{-3\alpha} - 6A_1^2 A_5 e^{-5\alpha} \\ + (3A_1^2 A_5 - A_5 N_B) e^{-7\alpha}$$

$$F_5 = -6A_1 A_5 e^{-3\alpha} + 12A_1 A_5 e^{-5\alpha} - 6A_1 A_5 e^{-7\alpha}$$

$$F_7 = 3A_5 e^{-3\alpha} - 6A_5 e^{-5\alpha} + 3A_5 e^{-7\alpha}$$

$$N_B = \frac{3 - 6A_1 + 3A_1^2}{1 + 2A_5}$$



図-12

式(16)を用いて4.と同様の演算より所要の α , β , γ が求まるが特に $\alpha=0$ の孔縁応力を示せば

$$(\beta\beta)_{\alpha=0} = \frac{M B_0 \{ (1 - A_1^3 + 20A_1 A_5^2 - 30A_5^2 + \frac{1}{3} A_1 N_B) \sin \beta + \{ -A_1 + A_1^3 + A_1^2 A_5 - \frac{1}{3} (1 + 5A_5) N_B \} \sin 3\beta \}}{I \{ (1 + A_1^2 + 25A_5^2) - 2A_1 \cos 2\beta + 10A_1 A_5 \cos 4\beta - 10A_5 \cos 6\beta \}}$$

図13~15はx, y軸上の β とまた図16は孔縁応力 $(\beta\beta)_{\alpha=0}$ と $\lambda=0.6, 1.0, 2.0$ の値に対してそれぞれ示したものである。

7 考察および結び

本論は非正六角形孔を有する板が引張力, せん断力, 曲げモーメント等の面内荷重を受けるときの孔縁応力およびx, y軸上の応力を二次元弾性的に求め, これを形状を支配する定数 λ に対して図示したものである。

その結果計算にとりあげた範囲内で次のことが明らかとなった。

(i) 引張力Tを受ける場合最も応力集中が著しいのは正六角形に近い。

$\lambda=0.6$ のときであり, 外力Tの約4.5倍にも及ぶ。最小の応力集中は $\lambda=2.0$ のときであるが図-14のごとく隅部の丸みがかなり影響し, 定量的な判断には疑義がある。

(ii) せん断力Sを受ける場合, 応力集中は $\lambda=0.6$ のとき最大で, $\lambda=2.0$ のとき最小となり, Sの約9~5倍であるが(i)と同じ疑義が残る。

(iii) Deep beamがその面内に均一な曲げモーメントMを受ける場合には $\lambda=2.0$ の場合に最大の応力集中がみられ, $\lambda=0.6, 1.0$ とも同程度の応力集中が生じこの特徴は丸味を加味すれば更に顕著となることを主張する。

(iv) 引張力, せん断力あるいは曲げモーメントいずれの作用を受ける場合もy軸上の応力は孔のない場合の応力に急速に近づいている。これより本解法は孔の高さの約3~4倍の桁高を有する有孔梁に適用しうると云え, 実用される Castled Beamのごときとは有限桁高を考慮すべき別途課題となることが明白となり, これについては目下研究進行中である。

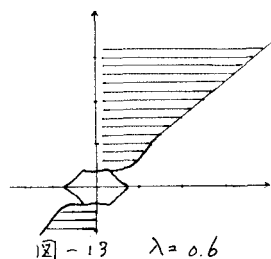


図-13 $\lambda=0.6$

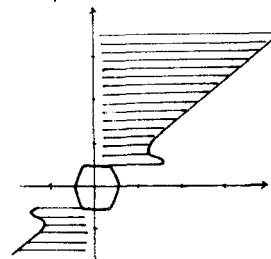


図-14 $\lambda=1.0$

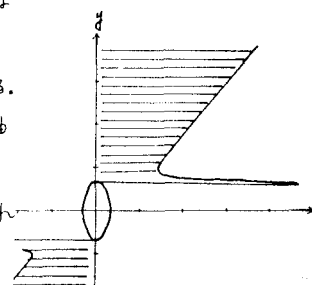


図-15 $\lambda=2.0$

以上のごとき $\lambda=0.67$ と固定したことにより, 隅部の丸みが各形状でかなり

相違し, 正確な比較となりなかつたが λ を固定せば

丸味を合致させたこの吟味の興味ある課題として残り,

いずれ後日発表の予定である。

最後に有益なる御助言を賜った九州大学応用力学研究所熊井豊二教授に厚く謝意を表する。

参考文献

1) 上野, 熊井 後編: "六角形孔を有する板の孔縁応力", 才川回次学術講演会講演要旨 S 41, 5

2) C.W. Prohaska: "Vibrations Verticales du Navire" Bull. A.T.M.A., 1947

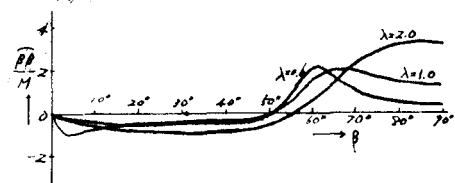


図-16 曲げモーメントを受け孔の孔縁応力