

1. まえがき

線形弾性をもつ物体のある領域に分布荷重 p が加わり、それに対応して変位 w を生じたとすれば、 p と w との間には一般に線形寫像

$$L(w) = p, \quad w = L^{-1}(p) \quad \text{-----} \quad (1.1)$$

の関係がある。この寫像に対し

$$L(\varphi) = \lambda \varphi \quad \text{-----} \quad (1.2)$$

を満足する λ , φ をそれぞれ(その領域に対する)変形の固有値, 固有函数と呼ぶ。本文はそれらの求め方, 応用などを主に平板を例として述べる。

2. 変形の固有函数

p および w は一般にその位置を示す 1~3 個のパラメーターをもつが、いま 1 個のパラメーターによつて示される場合を考える。これはいろいろの場合に適用できるが、ここでは線荷重をうける平板を例として説明を進めることにする。

微小撓みの平板(曲げ剛性 D) の撓み w と分布荷重 p との間には

$$D \Delta \Delta w = p \quad \text{-----} \quad (2.1)$$

が成立ち、その逆寫像は境界条件を満足する Green 函数 $K(P, Q)$ (P, Q は平板上の 2 点)を用い

$$w_p = \int K(P, Q) p_a dS_a \quad \text{-----} \quad (2.2)$$

と示される。いま、平板内の一曲线 C に沿つて働く線荷重 $p(s)$ を考え、 C に沿う撓みを $w(s)$ とすれば(ここに s は曲线 C のパラメーターで通常一端からの弧長をとる)、次式が成り立つ。

$$D \Delta \Delta w = \delta_C p \quad \text{-----} \quad (2.3)$$

$$w(s_p) = \int_C K(P, Q) p(s_a) ds_a \quad \text{-----} \quad (2.4)$$

ここに、 δ_C は

$$\delta_C = 0 \quad (C \text{ 以外で}), \quad \delta_C = \infty \quad (C \text{ 上で}), \quad \delta_C dS = ds \quad \text{----} \quad (2.5)$$

となるようなデルタ函数である。普通、 w から p を求める問題は、微分可能性さえ成り立てば、(2.1)式から容易に求められるが、 C 上の $w(s)$ を与えて $p(s)$ を求める問題を考えると(2.3)式を用いることができず、(2.4)式を解かなければならない。(2.4)式は曲线 C の形状などに

関係なく、同一の Green 函数を用いて与えられてい³ることは便利である。

(2.4) 式は $P(s)$ に関し 対称核 $K(P, Q)$ を有する第 1 種 Fredholm 型積分方程式であり、その固有値 λ , 固有函数 φ , が 固有方程式

$$\varphi(s) = \lambda \int_C K(s, s_0) \varphi(s_0) ds_0. \quad \text{-----} \quad (2.6)$$

から得られれば (一般に可附番無限個の直交函数系をつくる), 求める解 $P(s)$ は収収を前提として 広義の Fourier 展開

$$\left. \begin{aligned} P(s) &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \varphi_i(s) \\ A_i &= \lambda_i \int_C w(s) \varphi_i(s) ds \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} \quad (2.7)$$

として求められる。こゝに 固有函数 φ_i は正規化されているものとする。固有函数は Green 函数 $K(P, Q)$ が同一であつても、積分域 C によつて異なることに注意する。

平板の境みにおける Green 函数は一般に可なり複雑な形をとるため、(2.6) 式を解いて固有函数の解析的表示を得ることは困難な場合が多い。しかし、次のような場合には容易に解を得ることができる。平板は一般に 2 個のパラメーターをもつが、その一つを s に一致させることができれば、平板のパラメーターを (s, u) とし、曲線 C は $u = c$ とおくことができる。(2.2) 式の固有函数は周知の振動方程式

$$D \Delta \Delta \Phi = \lambda \Phi \quad \text{-----} \quad (2.8)$$

から求めることができるが、 Φ が特に分離形に

$$\Phi_{ij}(s, u) = \varphi_i(s) \psi_j(u) \quad \text{-----} \quad (2.9)$$

と記すことができる場合は、(2.2) 式の核 $K(P, Q) = K(s_p, u_p, s_a, u_a)$ は Mercer の展開定理により

$$\begin{aligned} K(P, Q) &= \sum_{ij} \frac{1}{\lambda_{ij}} \Phi_{ij}(s_p, u_p) \Phi_{ij}(s_a, u_a) \\ &= \sum_{ij} \frac{1}{\lambda_{ij}} \varphi_i(s_p) \psi_j(u_p) \varphi_i(s_a) \psi_j(u_a) \end{aligned}$$

と記すことができるので、(2.4) 式の核 $K(P, Q) = K(s_p, s_a)$ は

$$K(P, Q) = \sum_i \left[\sum_j \frac{1}{\lambda_{ij}} \{ \psi_j(c) \}^2 \right] \varphi_i(s_p) \varphi_i(s_a) \quad \text{----} \quad (2.10)$$

とかける。 $\varphi_i(s)$ が直交条件

$$\int_C \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds = m_i \delta_{ij} \quad \text{-----} \quad (2.11)$$

を満足すれば、(2.4) 式の固有函数は $\frac{1}{\sqrt{m_i}} \varphi_i(s)$ で、その固有値は

$$\lambda_i = \frac{1}{m_i \sum_j \frac{1}{\lambda_{ij}} \{ \psi_j(c) \}^2} \quad \text{-----} \quad (2.12)$$

となる。このように解かれるのは単純支持矩形板など少数の場合である。また、(2.11)式は一般には満足されないことに注意する。

Green函数が知られていない場合、同じ問題を(2.3)式の固有値問題として扱うことは可能であるが、やはり解析的に固有函数を求めることは一般に困難で、工学的には次に述べるように数値的に stiffness matrix を求め、その固有ベクトルを考えるのが簡明である。

3. 数値解法

まず、(2.4)式を数値積分に直すため、 C を n 等分し、その分割長を h とする。マトリックスで記せば

$$w = h K M p \quad \text{-----} \quad (3.1)$$

となり、 w , p はそれぞれ荷重ベクトル、 K は flexibility matrix, M は分割点の weight を示す対角線マトリックスである。これより

$$p = \frac{1}{h} M^{-1} K^{-1} w \quad \text{-----} \quad (3.2)$$

を得る。Green函数が求められていないか、求められていても数値計算困難な場合には、(2.3)式を差分化するか finite element 法を用い、stiffness matrix を求めて計算を行う。

(2.3)式を数値化するため、平板を適当な mesh に分割する。この場合、 C の形状に応じて mesh を選ぶ必要があり、ここでは C が mesh 線に一致し、 N 個の分割点の中、 $1 \sim n$ が C 上の分割点とする。

$$M' S w = h M'' p \quad \text{-----} \quad (3.3)$$

が得られ、ここには $M' S$ は板全体の stiffness matrix ($N \times N$)、 M' は S を対称化するための対角線マトリックス、 M'' は荷重の weight を示す対角線マトリックスで、通常は C の内点に対して1、端点に対して $\frac{1}{2}$ 、その他は0を成分としている。(3.3)式の w , p は N ベクトルであるので、これを C に関する n ベクトルに直せば、

$$S^* w = h M^* p \quad \text{-----} \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} S^* &= S_1 - S_2 S_3^{-1} S_2 \\ M^* &= (M')^{-1} M'' \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} \quad (3.5) \quad \text{ここは} \quad S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ N-n \end{matrix} \quad \text{---} \quad (3.6)$$

となり、

$$p = \frac{1}{h} (M^*)^{-1} S^* w \quad \text{-----} \quad (3.7)$$

が得られる。(3.1)式の K は C に関係ない板全体の flexibility matrix の部分マトリックスであるのに対し、その逆マトリックス S^* は C のとり方によつて異なるものとなることに注意する。数値計算では $w \rightarrow p$ の写像はマトリックス、その固有函数は n 個のベクトル v_i ($|v_i| = 1$) となり

$$\frac{1}{h} (M^*)^{-1} S^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T \quad \text{-----} \quad (3.8)$$

となる。

4. 例題

例題として 図-1 に示すように自由端まで達しない剛体梁によって等間隔に支持された片持板が、分布荷重 $q(x)$ を受ける場合、梁に生ずる反力分布を求める問題を考える。

梁のない片持板の Green 函数は求められている²⁾が複雑であり、ここでは $b = \frac{6.5}{8}a$, $c = a$ の場合の数値計算例を示す。図示のように ABDE の区域を 8×4 の mesh に分割し、(2.3) 式を差分化した (3.3) 式を求める。(3.5) 式によって、支持梁 C 上の点 1~6 に対する stiffness matrix S^* を求めれば

$$S^* = \frac{D}{h^2} \begin{pmatrix} 14.5978, & -7.3529, & 1.2552, & 0.1031, & 0.0445, & 0.0234, \\ -7.3529, & 12.7794, & -7.5945, & 1.1781, & 0.0550, & 0.1136, \\ 1.2552, & -7.5945, & 12.6751, & -7.6480, & 1.0969, & 0.2550, \\ 0.1031, & 1.1781, & -7.6480, & 12.6301, & -7.7888, & 1.5265, \\ 0.0445, & 0.0550, & 1.0969, & -7.7888, & 11.8592, & -5.2344, \\ 0.0234, & 0.1136, & 0.2550, & 1.5265, & -5.2344, & 3.1538, \end{pmatrix}$$

となり、その固有値、固有ベクトルは 図-2 に示すとおりである。

一例として $q(x) = q$ の等分布荷重に対しては、梁がない場合の境 w が

$$w = \frac{qh^4}{D} (14.708, 54.0, 111.375, 181.333, 259.375, 342.0,)$$

となるので、支持梁上の反力 P は (3.7) 式より

$$P = qa(-0.5387, 0.3559, 0.6162, 0.6796, -0.0952, 4.0765,)$$

と得られる P の分布は可なり不規則であるので、精度をますためには、命令をふやす他、weight matrix M^* を合理的にとることが必要であると思う。

5. あとがき

以上、平板の問題を例として、変形の固有函数について説明を行った。変形の性質を調べるため、また工学的応用面からも変形の固有函数について研究する必要があると考える。弾性床の地盤反力係数なども地盤の変形の固有値問題として考察されるべきであると思う。最後に、数値計算については大学院学生岸野佑次君の世話になったことを付記し感謝する。

参考文献

- 1) R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Springer (1937)
- 2) T. J. Jaramillo: Deflections and Moments Due to a Concentrated Load on a Cantilever Plate of Infinite Length, J. Appl. Mech. vol. 17 (1950), p. 67

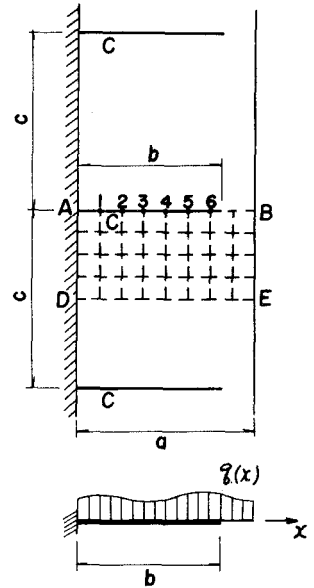


図-1

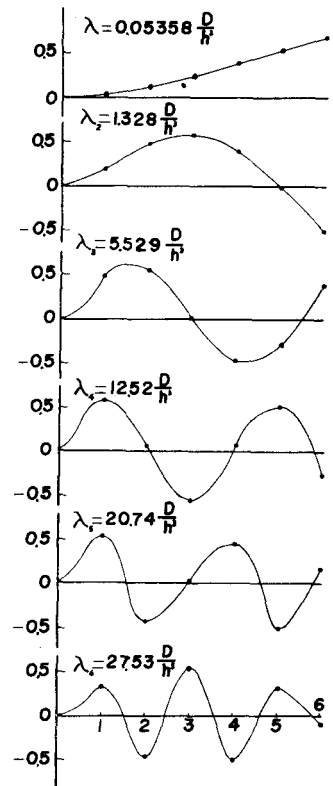


図-2