Ⅳ－143　ＣＰＭの数学構造とその解法

京都大学工学部 正員 工博　吉川和広

1. まえがき

最近、一般土木工事の工程計画に関して、時間的な側面に重点をおいたＰＥＲＴ手法が広く用いられるようになってきた。ＰＥＲＴの概念に加えて、プロジェクト費用を最小にするようなスケジュールを求めるのがＣＰＭであり、今後の発展が期待されている。

2　ＣＰＭの定式化

ＣＰＭの与えられたネットワークＰは，$n+1$ 個の結合点$(0,1,2,\cdots n)$，m個の作業をもつものとする。Ｐに属する作業(ij)に対して、結合点時刻t_i，費用勾配C_{ij}，標準作業時間D_{ij}，特急作業時間d_{ij}が与えられているとき、作業(ij)のスケジュールにおける所要時間をy_{ij}とすると，ＣＰＭの問題は

$$1.\ y_{ij}+t_i-t_j\leqq 0,\ (ij)\in P \quad 2.\ d_{ij}\leqq y_{ij}\leqq D_{ij}<\infty,\ (ij)\in P \quad 3.\ -t_0+t_n\leqq\lambda \tag{1}$$

式(1)の制限条件のもとで

$$U(\lambda)=\underset{y_{ij}}{\mathrm{Max}}\sum_{(ij)\in P}C_{ij}\,y_{ij} \tag{2}$$

を求めることになる。すなわちＣＰＭの問題は，λをパラミーターとするパラメトリックプログラミングの問題として定式化される。

3　ＣＰＭの一般解法

ネットワークＰのアークをつぎのように分類する。

$$Q_1=\{(ij)\,|\,y_{ij}+t_i-t_j\leqq 0,(ij)\in P\},\ Q_2=\{(ij)\,|\,y_{ij}=D_{ij}>d_{ij},(ij)\in P\},\ Q_3=\{(ij)\,|\,y_{ij}=D_{ij}=d_{ij},(ij)\in P\},\ Q_4=\{(ij)\,|\,y_{ij}=d_{ij}<D_{ij},(ij)\in P\} \tag{3}$$

y_{ij}のベクトルを$\mathbf{y}$，t_i,t_jのベクトルを$\mathbf{t}$とし，$\mathbf{z}=\{\mathbf{y},\mathbf{t}\}$をデュレーションλに対する最適許容解とすると、デュレーション$\lambda^*=\lambda-\theta$に対する最適許容解$\mathbf{z}^*=\{\mathbf{y}^*,\mathbf{t}^*\}$は，

$$y^*_{ij}=y_{ij}-\theta\sigma_{ij}\ ,\quad (ij)\in P\ .\quad t^*_i=t_i-\theta\delta_i\ ,\quad 0\leqq i\leqq n \tag{4}$$

として求めることができる。式(4)のσ_{ij}，δ_iはつぎの制限双対問題をとくことによって求められる。

$$\left.\begin{array}{llll}\text{制限条件}\quad 1.\ p_{ij}=\sigma_{ij}+\delta_i-\delta_j\geqq 0, & (ij)\in Q_1 & 2.\ \sigma_{ij}\geqq 0, & (ij)\in Q_1\cap Q_2\\ 3.\ \sigma_{ij}=0 & (ij)\in P-(Q_1-Q_3) & 4.\ \sigma_{ij}\leqq 0 & (ij)\in Q_1\cap Q_4\\ 5.\ \delta_0=0\quad \delta_n=1 & & & \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\text{目的関数}\qquad \mathrm{Min}\left\{\sum_{(ij)\in P}C_{ij}\sigma_{ij}\right\} \tag{6}$$

また式(4)のθ $(0\leqq\theta\leqq\theta_0)$は次式により計算することができる。

$$\left.\begin{array}{c}\theta_0=\mathrm{Min}[\theta_1,\theta_2,\theta_3]\\ \theta_1=\begin{cases}\underset{p_{ij}<0}{\mathrm{Min}}[(y_{ij}+t_i-t_j)/p_{ij}]\\ +\infty,\ \text{すべての}(ij)\in P\text{に対して}p_{ij}\geqq 0\text{の場合}\end{cases}\ \theta_2=\begin{cases}\underset{\sigma_{ij}<0}{\mathrm{Min}}[(y_{ij}-D_{ij})/\sigma_{ij}]\\ +\infty\ \ \text{すべての}(ij)\in P\text{に対して}\sigma_{ij}\geqq 0\text{の場合}\end{cases}\ \theta_3=\begin{cases}\underset{\sigma_{ij}>0}{\mathrm{Min}}[(y_{ij}-d_{ij})/\sigma_{ij}]\\ +\infty,\ \text{すべての}(ij)\in P\text{に対して}\sigma_{ij}\leqq 0\text{の場合}\end{cases}\end{array}\right\} \tag{7}$$

4　ＣＰＭとプライマルデュアル法

ＣＰＭの問題を式(4)を用いてとく場合、計算が複雑なため，あまり実用的とはいえない。一般にはＣＰＭの問題はプライマルデュアル法によりフロー問題に転化してとくのが便利である。

式(1)，(2)をベクトルと行列を用いてあらわすと双対問題となり，

$$D(\lambda):\quad \mathbb{Z}'\mathbb{A} \leqq \mathbb{C}'+\lambda \mathbb{d}' \quad , \mathbb{Z}'\mathbb{b} \longrightarrow \mathrm{Max}. \tag{8}$$

つぎに行列$\mathbb{A}$のj番目の列ベクトルを$\mathbb{Q}_j$とおく。また式(8)の主問題は

$$P(\lambda):\quad \mathbb{A}\mathbb{x}=\mathbb{b},\ \mathbb{x}\geqq \mathbb{0} \quad , \quad (\mathbb{C}'+\lambda \mathbb{d}')\mathbb{x} \longrightarrow \mathrm{Min}. \tag{9}$$

$\mathbb{B}$をデュレーションλに対するベーシスマトリックス，$\mathbb{C}_B, \mathbb{d}_B$を$\mathbb{C}, \mathbb{d}$のエレメントのなかから$\mathbb{B}$に対応するエレメントを選んで構成される列ベクトルとすると，D(λ)の最適解は双対定理により，

$$\mathbb{Z}' = (\mathbb{C}_B'+\lambda \mathbb{d}_B')\mathbb{B}^{-1} \tag{10}$$

インデックスの集合を $\quad S=\{j \mid \mathbb{Z}'\mathbb{Q}=C_j+\lambda d_j,\ 1\leqq j\leqq n\}$

とすると，シンプレックス基準 $\quad \mathbb{Z}'\mathbb{Q}_j=[\mathbb{C}_B'+\lambda \mathbb{d}_B']\mathbb{B}^{-1}<C_j+\lambda d_j \qquad (11)$

が成立するかぎりλの値はかわらない。また式(8),(9)の制限双対問題および制限主問題は，

$$RD(\lambda):\quad \delta\mathbb{Q}_j \geqq d_j \quad , j\in S \qquad \delta'\mathbb{b} \longrightarrow \mathrm{Min}. \tag{12}$$

$$RP(\lambda):\quad \sum_{j\in S} x_j\mathbb{Q}_j=\mathbb{b},\ x_j\geqq 0 \qquad \sum_{j\in S} d_j x_j \longrightarrow \mathrm{Max}. \tag{13}$$

となり，$\mathbb{Z}^*$を$\lambda^*=\lambda-\theta$のときのD(λ)の最適解とすれば，$\quad \mathbb{Z}^{*\prime}=\mathbb{Z}'-\theta\delta \qquad (14)$

となる．式(14)に対応するP(λ)の最適解は，$\quad \mathbb{x}^*=\mathbb{B}^{-1}\mathbb{b} \qquad (15)$

となる。式(14)をD(λ)の目的関数に代入すると，$\quad (\mathbb{Z}'-\theta\delta)\mathbb{b}=[\mathbb{C}_B'+(\lambda-\theta)\mathbb{d}_B']\mathbb{B}^{-1}\mathbb{b} \qquad (16)$

式(15)をP(λ)の目的関数に代入すると $\quad [\mathbb{C}'+(\lambda-\theta)\mathbb{d}']\mathbb{x}=[\mathbb{C}_B'+(\lambda-\theta)\mathbb{d}_B']\mathbb{B}^{-1}\mathbb{b} \qquad (17)$

となり，双対問題により式(14)はλ^*のときのDλの最適解となる。従ってCPMの問題は式(5),(6)の制限双対問題をとくことのかわりに制限主問題をといても同じであるということが明らかになった。

5 フロー問題によるCPMの解法

式(5),(6)に対する制限主問題は，

制限条件

1. $\sum_{(ij)\in p} f_{ij}-\sum_{(jk)\in p} f_{jk}=0$, $(1\leqq j\leqq n-1)$
2. $0\leqq f_{ij}\leqq C_{ij}$, $(ij)\in Q_1\cap Q_2$, $(e(ij1)=0, e(ij2)>0)$
3. $0\leqq f_{ij}=C_{ij}$, $(ij)\in Q_1-(Q_2\cup Q_3\cup Q_4)$, $(e(ij1)<0, e(ij2)>0)$
4. $f_{ij}\geqq C_{ij}$, $(ij)\in Q_1\cap Q_4$, $(e(ij1)<0, e(ij2)=0)$
5. $f_{ij}=0$, $(ij)\in P-Q_1$, $(e(ij1)>0)$

(18)

目的関数 $\quad \sum_{(oj)\in p} f_{oj} \qquad (19)$

を最大にするようなフロー$\{f_{ij}\}$を求めることとなる。ここに

$$e(ij1)=t_j-(t_i+D_{ij}) \quad , e(ij2)=t_j-(t_i+d_{ij}) \tag{20}$$

この最大フロー問題はラベリング法によりもとめることができる。ラベリング過程が終了したときの$\{f_{ij}\}$はフロー条件をみたし，ラベルのついた結合点の集合をI，つかなかった結合点の集合をJとすると，I,Jによってきまるアークの集合，

$$Q_5=\{(ij)\mid i\in I,\ j\in J,\ (ij)\in Q_1\} \qquad Q_6=\{(ij)\mid i\in J,\ j\in I,\ (ij)\in Q_1\} \tag{21}$$

はカットをつくり，そのカット値と流量は等しくなる。そして$\lambda^*=\lambda-\theta$に対する最適許容解$\{y^*, t^*\}$は

1. $y_{ij}^*=y_{ij}-\xi$ $\quad i\in I,\ j\in I,\ e(ij1)\leqq 0\ e(ij2)>0$
2. $y_{ij}^*=y_{ij}+\xi$, $i\in J, i\in I$, $e(ij1)<0$, $e(ij2)\geqq 0$
3. $y_{ij}^*=y_{ij}$ $\quad$ その他の場合

1′. $t_i^*=t_i$, $i\in I$ $\qquad$ 2′. $t_i^*=t_i-\xi$, $i\in J$

(22)

ここに，$\xi=\mathrm{Min}(\xi_1, \xi_2)$， $\xi_1=\min_{Q_5}[e(ijk)]$， $\xi_2=\min_{Q_6}[-e(ij1)]$ $\quad (k=1,2 \qquad (23)$

となり，プロジェクト費用の増加量は $\quad \Delta P=\xi\times\sum_{(oj)\in p} f_{oj} \qquad (24)$

として計算することができる。