Ⅳ－140　道路線形設計曲線について

正会員　東京大学生産技術研究所　星埜　和

1. 平面線形設計曲線の一般化　これまで一般道路の平面線形設計に用いられる曲線は円弧とクロソイド（半径無限大の曲線として直線をふくむ）に限られているといってよい。設計条件の複雑化にともなってさらに自由度の大きい曲線群を使いこなす必要があろう。一般に

$$S = mR_0\theta^{\frac{1}{m}}, \quad \text{または} \quad \theta = \left(\frac{S}{mR_0}\right)^m,$$

ここに　S：起点0からの曲線長

θ：らせん角（radian）

m：定数

R_0：$\theta = 1$ rad. における基準半径（パラメーター）

とおくと，曲線上の任意の一点における半径Rと曲率Kはそれぞれ

$$R = \frac{dS}{d\theta} = R_0\theta^{\frac{1}{m}-1}, \qquad K = \frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0}\theta^{1-\frac{1}{m}},$$

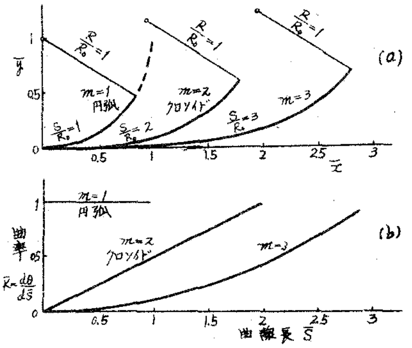


図-1　単位曲線の(a)平面図，(b)曲率図

となる。これらの基本式において，$m = 1$ ならば $R = R_0$ で円弧（$R_0 = \infty$ のとき直線）をあらわし，$m = 2$ ならば $S = 2R_0\theta^{\frac{1}{2}}$　$R = R_0\theta^{-\frac{1}{2}}$，$SR = 2R_0^2$ でクロソイドをあらわす。mを1以上の数にとると，円弧，クロソイドをふくむ曲線群をうる。これを円弧クロソイド曲線群とよび，平面線形設計（場合によっては縦断線形設計）に用いることができる。実用には数表を作成しておくのが望ましい。

クロソイドのパラメーターとして常用されている $A = \sqrt{2}R_0$（クロソイドハンドブック），$C = R_0$（星埜：道路工学(上)）であるが，円弧クロソイド曲線群の共通パラメーターとしてR_0を用いるべきであろう．$SR = A^2$ という関係はクロソイドだけにあてはまるものである．

単位曲線（図-1）はR_0をパラメーターとして

$$\bar{S} = \frac{S}{R_0} = m\theta^{\frac{1}{m}}, \quad \bar{r} = \frac{R}{R_0} = \theta^{\frac{1}{m}-1}, \quad \bar{K} = \frac{R_0}{R} = \theta^{1-\frac{1}{m}} \quad \bar{S}\,\bar{r} = \frac{S}{R_0}\frac{R}{R_0} = m\theta^{\frac{2}{m}-1}, \quad \frac{\bar{S}}{\bar{r}} = m\theta$$

とすればよく，各式はmが与えられれば，θのみの関数である．

2. 直角座標の計算　曲線の起点0を座標の原点にとり，曲線上の任意な一点の直角座標（x, y）をθの関数として求めると

$$x = \int \cos\theta\, dS = R_0\int \theta^{\frac{1}{m}-1}\cos\theta\, d\theta, \qquad y = \int \sin\theta\, dS = R_0\int \theta^{\frac{1}{m}-1}\sin\theta\, d\theta$$

を部分積分して

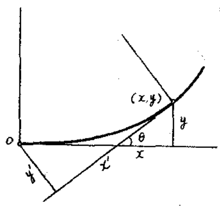
$$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta, \qquad y = x'\sin\theta - y'\cos\theta$$

をうる。ただし

$$\frac{x'}{R_0} = \bar{x}' = \theta^{\frac{1}{m}} \left\{ m - \frac{m^3}{(1+m)(1+2m)}\theta^2 + \frac{m^5}{(1+m)(1+2m)(1+3m)(1+4m)}\theta^4 - \cdots\cdots \right\}$$

$$\frac{y'}{R_0} = \bar{y}' = \theta^{1+\frac{1}{m}} \left\{ \frac{m^2}{1+m} - \frac{m^4}{(1+m)(1+2m)(1+3m)}\theta^2 + \frac{m^6}{(1+m)(1+2m)(1+3m)(1+4m)(1+5m)}\theta^4 \cdots\cdots \right\}$$

であって，x', y' は曲線上の点（x, y）を座標の原点とし，曲線の切線と垂線を座標軸としたときの曲線の起点 O の座標（図－2）であることを証明できる。



図－2

円弧クロソイド曲線群における直角座標 (x, y) と原点の座標 (x', y')

3. 部分曲線の計算　円弧クロソイド曲線群に属する曲線上にある2点（i, j）をとれば，曲線の起点 O を原点としたときの θ, x, y, x', y' に i, j の添字をつけると（図－3）

$$S_i = mR_0\theta_i^{\frac{1}{m}} \qquad S_j = mR_0\theta_j^{\frac{1}{m}} \qquad \theta_{ij} = \theta_j - \theta_i \qquad S_{ij} = S_j - S_i = mR_0\left(\theta_j^{\frac{1}{m}} - \theta_i^{\frac{1}{m}}\right)$$

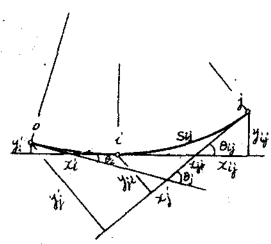
i を原点として2点間にある任意の点までの曲線長 S およびその微分は，らせん角を θ とすると，

$$S = mR_0\left\{(\theta_i+\theta)^{\frac{1}{m}} - \theta_i^{\frac{1}{m}}\right\}, \qquad dS = R_0(\theta_i+\theta)^{\frac{1}{m}-1}d\theta$$

よって i 点を座標原点とする j 点の座標（x_{ij}, y_{ij}）は

$$x_{ij} = \int_0^{S_{ij}} \cos\theta\, dS = R_0\int_0^{\theta_{ij}} (\theta_i+\theta)^{\frac{1}{m}-1}\cos\theta\, d\theta$$

$$y_{ij} = \int_0^{S_{ij}} \sin\theta\, dS = R_0\int_0^{\theta_{ij}} (\theta_i+\theta)^{\frac{1}{m}-1}\sin\theta\, d\theta$$



図－3

円弧クロソイド曲線群における部分曲線図

を積分して

$$x_{ij} = x_j'\cos\theta_{ij} - x_i' + y_j'\sin\theta_{ij}$$

$$y_{ij} = x_j'\sin\theta_{ij} - y_j'\cos\theta_{ij} + y_i'$$

また j を原点としたとき，i 点の座標（x_{ji}, y_{ji}）は

$$x_{ji} = x_{ij}\cos\theta_{ij} + y_{ij}\sin\theta_{ij} = x_j' - x_i'\cos\theta_{ij} + y_i'\sin\theta_{ij}$$

$$y_{ji} = x_{ij}\sin\theta_{ij} - y_{ij}\cos\theta_{ij} = y_j' - x_i'\sin\theta_{ij} - y_i'\cos_{ij}$$

4. 応用　円弧クロソイド曲線群の数表を作成し，x', y' を加え，かつ sin, cos の表を用いることによって，線形設計用曲線の自由度はいちじるしく拡大され，部分曲線とその組合せそのほか走行条件に適合した設計が容易になろう。