Ⅳ－131　　交通量分布の解析に関する統計力学的考察

京都大学工学部　正員　工博　米谷栄二
京都大学工学部　正員　工修○松井寛

1．まえがき　　都市内の諸種の交通体系のうち、街路交通は最も複雑で、形、性能を異にする多種多様の車が、同じく性格や能力を異にする運転者によって、それぞれ独自のODに従って走行しているのであって、自分の意志で自由に動かせるという点からみれば、まさしくブラウン運動的である。たとえ車一台一台について、その行動を追跡できたとしても、それらの運動からなんらかの法則性をみいだすことはできないであろう。しかし街路上の交通流を巨視的に眺めると、車は各交差点である確率で方向を変えながら走行していくようにみえる。そこで交通流の挙動を、偶然的現象としてとらえ、確率論的立場から街路交通流の諸種の現象を理論的に解明できるかを検討してみよう．

2．モデルの設定　　確率論的立場から交通流を解析するにあたって、同じく確率論が重要な役割を果す統計力学は大いに興味がある，特に統計力学で扱われる気体分子運動論は、気体分子を自動車に置き換えて考えると、交通流の解析に有用である。いま問題とする街路網を等区間(長さl)に分け、それぞれ単位となる街路ゾーンとする。いま等区間のゾーンで考えているから，各ゾーン中の車の台数は，交通密度を表わしていることに注意する。街路ゾーンi中の時刻tにおける交通密度を$n_i(t)$で表わし，特に速度が$(v,\ v+dv)$の範囲の車の台数(分布函数)を$f_i(v,t)dv$で表わすと、次式が成立する。

$$\int f_i(v,t)\,dv = n_i(t) \qquad (1)$$

次に街路ゾーンの一般的なモデルを図-1に示す。各街路ゾーンには，交通発生源、交通吸収源をそれぞれ独立なゾーンとして一対設ける。街路ゾーンiには，いま六本の街路ゾーンが接続しているが、一般には何本であってもよく、また発生源x_i，吸収源r_iのどちらかあるいは両方共なくてもよい。以上の街路モデルで車の動きを考えると、発生源を出発した車は，ある分岐確率によって各交差点で方向を変え、これを繰返しながら、ついにある確率に従ってそれぞれの吸収源に吸収されるわけである。

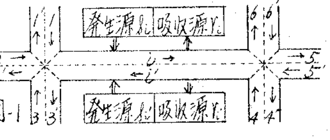

図-1

3．交通量分布の理論式　　いま街路ゾーンi上の時刻tにおける速度が$(v,\ v+dv)$の範囲の車の台数，$f_i(v,t)dv$は、ゾーン内で均等に分布していると仮定し、また速度が$(v,\ v+dv)$の範囲の車は、微小時間Δtに$v\Delta t$だけ進むことと考え合わせると、微小時間Δt中に$\frac{v\Delta t}{l}f_i(v,t)dv$だけの車が次のゾーンに移動すると考えられる。同様な考え方に基づいて、いま街路ゾーンiのΔt中での車の出入りを考え，分布函数の増減を求めると、

$$f_i(v,t+\Delta t)dv - f_i(v,t)dv = \sum_{K=1,2,3} P_{Ki}\frac{v\Delta t}{l}f_K(v,t)dv + \frac{v\Delta t}{l}f_{x_i}(v,t)dv - \frac{v\Delta t}{l}f_i(v,t)dv \qquad (2)$$

ここで右辺第一項は、Δt中に街路ゾーンK(K=1,2,3)からiにP_{Ki}なる分岐確率に従って車が流入した増加分を示し，第二項は、同じく発生源から車が流入した増加分を示す。ただ注意しなければならな

らないのは、発生源も一般の街路ゾーンと同等に扱っているため、発生源の ℓ などは仮想的なものである。第三項は、Δt 中に街路ゾーン i から車が流出する減少分を示している。式(2)の両辺を Δt でわり $\Delta t \to 0$ とし、さらに v で積分すれば、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f_i(v,t)\,dv = \sum_{k=1,2,3}\frac{P_{ki}}{\ell}\int v f_k(v,t)\,dv + \frac{1}{\ell}\int v f_{si}(v,t)\,dv - \frac{1}{\ell}\int v f_i(v,t)\,dv \tag{3}$$

上式の左辺は、前述の式(1)から $\frac{dn_i(t)}{dt}$ に等しく、また $\int v f_k(v,t)\,dv$, $\int v f_{si}(v,t)\,dv$, $\int v f_i(v,t)\,dv$ は、それぞれ街路ゾーン k, i および発生源 s_i の交通量を示しているから、それぞれ $Q_k(t)$, $Q_{si}(t)$, $Q_i(t)$ で表わすと、

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = \sum_{k=1,2,3}\frac{P_{ki}}{\ell}Q_k(t) + \frac{1}{\ell}Q_{si}(t) - \frac{1}{\ell}Q_i(t) \tag{4}$$

一般に街路の任意の区間で、交通量 $Q(t)$、速度 $v(t)$、交通密度 $n(t)$ の間には、$Q(t)=v(t)n(t)$ の関係が成立するから、これを上式に代入すると

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = \sum_{k=1,2,3}\frac{P_{ki}}{\ell}v_k(t)\,n_k(t) + \frac{1}{\ell}v_{si}(t)\,n_{si}(t) - \frac{1}{\ell}v_i(t)\,n_i(t) \tag{5}$$

上式で、$\frac{P_{ki}}{\ell}v_k(t) = a_{ki}(t)$, $-\frac{1}{\ell}v_i(t) = a_{ii}(t)$, $\frac{1}{\ell}v_{si}(t) = a_{si}(t)$ とおけば

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = \sum_{k=1,2,3} a_{ki}(t)\,n_k(t) \tag{6}$$

各街路の交通密度が比較的小さい場合には、各車は自由走行していると考えられるから、各ゾーンの車の平均速度は常に一定と考えて差支えない。この時は $a_{ki}(t) = a_{ki}$ とかけるから式(6)は、

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = \sum_{k=1,2,3} a_{ki}\,n_k(t) \tag{7}$$

式(7)は、交通密度 $n_i(t)$ に関する線形一次微分方程式である。

各街路の交通密度が比較的大きい場合は、車の速度は交通密度が大きくなるにつれて逆に小さくなるから、いま速度と交通密度との関係を $v_i(t) = \alpha_i - \beta_i n_i(t)$（速度と交通密度との関係を直線式で与えることは、交通量－密度曲線を放物線と仮定したことになる。α_i β_i は常数）と仮定してこれを式(5)に代入すると、

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = \sum_{k=1,2,3}\frac{P_{ki}}{\ell}n_k(t)\{\alpha_k - \beta_k n_k(t)\} - \frac{1}{\ell}n_i(t)\{\alpha_i - \beta_i n_i(t)\} + \frac{1}{\ell}Q_{si}(t) \tag{8}$$

上式は、交通密度 $n_i(t)$ に対して二次の微分方程式であるから、理論解を得ることは困難で、電子計算機によって数値解析的に解かねばならないであろう。

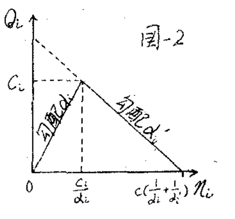

図-2

交通量－密度曲線を図のような三角形で与えることによって、前述の二次式を線形微分方程式にし、実用的な形に直すことができる。すなわち

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ_i(t)}{dt} &= a_i\Big\{\sum_{k=1,2,3}P_{ki}Q_k(t) - Q_i(t) + Q_{si}(t)\Big\} & 0 \le n_i < \frac{c_i}{\alpha_i} \\ -\frac{dQ_i(t)}{dt} &= a_i'\Big\{\sum_{k=1,2,3}P_{ki}Q_k(t) - Q_i(t) + Q_{si}(t)\Big\} & \frac{c_i}{\alpha_i} \le n_i < \Big(\frac{1}{\alpha_i}+\frac{1}{\alpha_i'}\Big)c \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ただし、$\frac{\alpha_i}{\ell} = a_i$　$\frac{\alpha_i'}{\ell} = a_i'$ とおいた。以上求めた街路上の交通量分布の理論式(7),(8),または(9)を各街路ゾーンでたて、与えられた初期条件で連立で解けば、交通量の少ない状態から交通渋滞にいたるまでの過渡状態を、うまくあらわせる。ただし発生源からの発生交通量は、あらかじめ与えなければならない。