# Ⅳ－124　ＯＤパターンに関する確率論的考察

京都大学工学部　正員　○佐佐木綱
京都大学工学部　正員　香川一男

## 1. 概説

都市内における車の運行をＯＤ交通について考えると，微視的には各自動車はそれぞれ固有のＯＤをもった運行をするわけであるが，都市内交通というなかば閉じた運行系における車の運行過程は巨視的にみると，マルコフ連鎖によって数学的に記述できることが，いくつかの研究例によって明らかになってきた。実際，都市をいくつかのゾーンに分割した場合，すべての車がゾーン間を確率的に運行しているわけではなく，都市外へ出て行く車もあり，また，特定のゾーン間を周期的に運行する車もあることは明らかである。本研究においては，このような運行パターンのことなる車を総合して考えた場合，ＯＤ交通に関する運行過程がマルコフ連鎖と考え得る範囲内の都市について，その都市内交通のＯＤパターンを推定する方法について考察した。

## 2. マルコフ連鎖とエントロピー

いま，都市内を$r$個のゾーンに分割し，車がゾーン$i$にいるとき，つぎの運行の目的地として同じ都市内のゾーン$j$をえらぶ条件付確率を$p_{ij}$であらわし，これをＯＤ遷移確率またはたんにＯＤ確率とよぶことにし，$p_{ij}$を$ij$要素とする行列を遷移確率行列とよびＰとかく。また，車がゾーン$i$にいる定常確率を$w_i$とし，$w_i$からなる行ベクトルを$w=(w_1, w_2, \cdots, w_r)$とし，極限ベクトルといい，これに都市内の全登録台数をかければ，定常状態における各ゾーンの発生交通量となる。

ここで，マルコフ連鎖のＰと$w$によって運行のエントロピーＨを定義することができる。すなわち

$$H=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} w_i p_{ij} \log p_{ij} \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

このＨを最大にするＰと$w$は，車の運行確率と発生集中交通量分布に特別の条件をつけないかぎり，確率論的にみてもっともおこりやすいＯＤパターンに対応することが証明される。ここで，Ｈを最大にするＰと$w$を計算すれば，$p_{ij}=w_j$，$w_j=\frac{1}{r}$，$(i, j=1, 2, \cdots, r)$となり，$i$，$j$間のＯＤ交通量はＮを１日あたり平均トリップ数とすれば，$NTw_ip_{ij}=\frac{NT}{r^2}$となる。つまり，すべてのＯＤ交通量はひとしくなり，これはエントロピー最大ということのもつ均衡化の概念と一致する。しかし，現実の都市においてはこのようなＯＤパターンが見られることはほとんどあり得ないであろう。それは，都市内における車の運行過程がまったくランダムではないということを示しているのであって，運行確率または発生集中交通量分布に現実的な条件をくわえる必要があると考えられる。そこで，都市内交通に関してその都市に固有の特徴を$w$すなわち発生集中交通量分布からとらえることとし，これを土地利用状況その他の条件を考慮して別途に推定し，これを与件としてＨを最大にするＰを推定した。このとき，$NTw_ip_{ij}=NTw_iw_j$なる関係が成立し，これがかなり現実のＯＤパターンに合致することは，マルコフ連鎖によるＯＤ交通量の推定の研究に関連して見出されていた性質であった。（具体的な数値例は講演時に発表する予定）

## 3. 走行時間あたりのエントロピー

2. においては都市内交通に関する都市の特徴として，発生集中交通量分布のみを考慮したのであるが，もうひとつの都市の特徴として，ゾーン間の走行に要する時間を考慮に入れることにして，単位走行時間あたりのエントロピーRを最大にすることを考えた。これは情報理論においては通信容量を最大にするものとして知られているが，車の運行過程の場合の意味づけは現在のところ不明である。いま，$ij$間の走行時間の平均値を$t_{ij}$とすれば，Rはつぎのように定義される。すなわち

$$R = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} w_i p_{ij} \log p_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} w_i p_{ij} t_{ij} \qquad \cdots\cdots (2)$$

Rを最大にする$p_{ij}$の推定は，ラグランジュの未定係数法によれば，つぎの関数Fの極値に対応する$p_{ij}$を求めればよい。すなわち，$\lambda_j$，$\mu_i$を未定係数とし，$T = \sum_{i=1}^{r} w_i p_{ij} t_{ij}$ とすれば

$$F = H/T + \sum_{j=1}^{r}\lambda_j\Big(\sum_{i=1}^{r} w_i p_{ij} - w_j\Big) + \sum_{i=1}^{r}\mu_i\Big(\sum_{j=1}^{r} p_{ij} - 1\Big) \qquad \cdots\cdots (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\partial F/\partial p_{ij} &= -w_i(1+\log p_{ij})/T - w_i t_{ij} R/T + \lambda_j w_i + \mu_i && (i,j=1,2,\cdots,r)\ (4\text{-}1)\\
\partial F/\partial \lambda_j &= \sum_{i=1}^{r} w_i p_{ij} - w_j = 0 && \cdots\cdots (4\text{-}2)\ (j=1,2,\cdots,r)\\
\partial F/\partial \mu_i &= \sum_{j=1}^{r} p_{ij} - 1 = 0 && \cdots\cdots (4\text{-}3)\ (i=1,2,\cdots,r)
\end{aligned}\right\} \cdots (4)$$

式(4-1)より

$p_{ij} = \alpha_i\beta_j \exp(-1-t_{ij}R)$ ……(5)，ここに $\alpha_i = \exp(-\mu_i T/w_i)$，$\beta_j = \exp(-\lambda_j T)$

式(4-2)，(4-3)および(5)から

$\alpha_i = \left(e \Big/ \sum_{j=1}^{r}\beta_j \exp(-t_{ij}R)\right)$ ……(6)，　$\beta_j = e w_j \Big/ \sum_{i=1}^{r} w_i\alpha_i \exp(-t_{ij}R)$ ……(7)

この方程式から$p_{ij}$を陽に表現することが困難であるので，電子計算機による収束計算によって$p_{ij}$を求めた。その計算手順の大略はつぎのとおりである。(1) Rと$\beta_j$をあたえて（最初は仮定）式(6)から$\alpha_i$をもとめる。(2) $\alpha_i$とRを用いて式(7)から$\beta_j$をもとめる。(3) あたらしい$\alpha_i$，$\beta_j$を用いて式(5)から$p_{ij}$をもとめる。(4) $p_{ij}$を用いて式(2)からRをもとめる。(5) 収束するまで(1)にもどる。（数値例は講演時に発表する予定）

いま，現実のOD交通量分布をODに関して，ほぼ対称になっている。この対称性は，$t_{ij}$を対称としたとき，式(4)からえられる$p_{ij}$についてもその性質があることを証明しておく。$ij$間のOD交通量は$TNw_ip_{ij}$であたえられるから，$w_ip_{ij} = w_jp_{ji}$ を証明すればよい。いま，式(5)において，$x_{ij} = \exp(-t_{ij}R)$とおけば，$p_{ij} = e^{-1}\alpha_i\beta_j x_{ij}$ とかくことができる。したがって，$x_{ij} = x_{ji}$であるから $w_i\alpha_i\beta_j = w_j\alpha_j\beta_i$ すなわち $w_i\alpha_i/\beta_i = w_j\alpha_j/\beta_j$ が証明できればよい。

いま，$M_i = w_i\alpha_i/\beta_i$ とおけば，結局，$M_i$が$i$に関係のない一定数であることを証明することに帰する。式(6)，(7)から $M_i = \sum_{j=1}^{r} w_j\alpha_j x_{ji} \Big/ \sum_{j=1}^{r}\beta_j x_{ij}$ ……(8)

したがって，$\sum_{j=1}^{r}(w_j\alpha_j - \beta_j M_i)x_{ij} = 0$ ……(9)

また，$M_j = w_j\alpha_j/\beta_j$ であるから $\sum_{j=1}^{r}\beta_j(M_j - M_i)x_{ij} = 0$ ……(10)

が成立する。いま，$M_i$は$i$に関係の一定数ではないと仮定する。$M_{i_0} = \max_i(M_i)$ とすれば，$\beta_j > 0$，$x_{ij} > 0$ であるから，$\beta_j(M_j - M_{i_0})x_{i_0 j} \leqq 0$，$(j=1,2,\cdots,r)$ また，$M_{j_0} < M_{i_0}$となる$M_{j_0}$がこの仮定から存在する。したがって，$\beta_{j_0}(M_{j_0} - M_{i_0})x_{i_0 j_0} < 0$，ゆえに

$\sum_{j=1}^{r}\beta_j(M_j - M_{i_0})x_{i_0 j} < 0$，となって式(10)を満足しない。したがって，この仮定は否定され，$M_i$は$i$に関係のない一定数である。