

京都大学工学部 正員 丹羽 義次

〇 小林 昭一

1. まえがき

コンクリート, モルタル, 岩石など, いわゆる脆性材料の圧縮強度は供試体の寸法, 形状および端部状態によって異なるといわれている。しかしながら圧縮強度は材料特性と考えられ, 試験方法には無関係なものであるべきであろう。数多くの実験から知られているように, 圧縮供試体内部の応力分布ある…は歪分布は, 供試体端面と荷重盤間の摩擦, 荷重の不均一分布および供試体の寸法と形状に依存する。従って, 圧縮強度を材料特性として求めるためには, K. Newman も指摘しているように, 端部摩擦の影響を求めるか, 端面摩擦を完全になくするかあるいは一様圧縮領域を生じるような試験方法に依るべきである。端部摩擦の破壊強度および破壊の形に及ぼす影響については, 古くから議論されているが, 定量的に求めることは困難である。ここでは, 破壊を考える一つの目安として, 供試体を完全弾性体と仮定して, 圧縮時における供試体内部の応力分布の解析を試みる。

2. 供試体内の応力分布の近似解

供試体は完全線形弾性体と仮定し, 平面応力状態にあるものとする。(平面歪状態の解は, 弾性係数 E , poisson 比 ν を一般化した弾性係数 $E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}$, poisson 比 $\nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu^2}$ に置き換えることにより求められる)。今図のように x 軸を対称軸として, 供試体 1 にそれと性質の異なる材料 2 を加えて材料 3 に加わった外力 P が作用するものとする。境界線 BC , EF では材料は連続結合されている。荷重 P が作用すると各材料は側方に変形するであろうが, 変形を許さないように側方から拘束されていると仮定すると, 矩形板には

$$\sigma_{x,i} = \nu_i \sigma_y^0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

なる応力が生じる。ここに σ_y^0 は P により生じる y 方向応力成分であり, 板厚を d とすると $\sigma_y^0 = \frac{P}{2d}$ で与えられる。 $\sigma_{x,i}$ 等は材料 i の x 方向応力成分である。しかしながら, $x = \pm l$ 边上には x 方向の拘束はないから, x 方向の応力は零である。この条件を満足させるためには

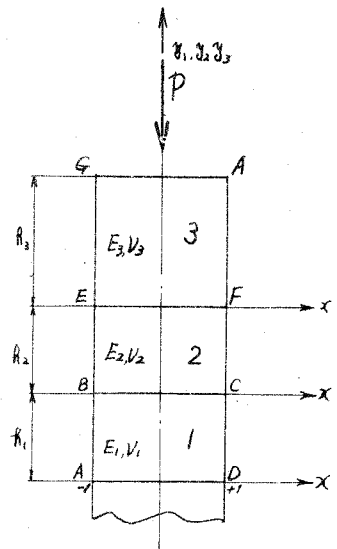
$$\sigma_{x,i}^* = -\sigma_{x,i} \quad (2)$$

なる附加外力を, $x = \pm l$ 边上に加えるなければならない。この外力によって生じる附加応力を $\sigma_{x,i}^*$ 等として表わすと, 求めべき応力成分は

$$\sigma_{x,i} = \sigma_{x,i}^0 + \sigma_{x,i}^*, \quad \sigma_{y,i} = \sigma_{y,i}^0 + \sigma_{y,i}^*, \quad \sigma_{xy,i} = \sigma_{xy,i}^0 + \sigma_{xy,i}^* \quad (3)$$

で表わされる。

附加応力を求めるためには, 応力函数を



$$\Phi_i(x, y_i) = \psi_{0,i}(x, y_i) + \sum_n f_n(x) g_{ni}(y_i), \quad \text{等} \quad (4)$$

とおき、 $\psi_{0,i}(x, y_i)$ は応力の境界条件を満足するように取り、また $f_n(x)$ としては

$$f_n(\pm 1) = f_n'(\pm 1) = 0 \quad (5)$$

を満足する正規直交多項式を用いると便利である。こうすることにより未知函数は $g_{ni}(y_i)$ だけとなる。Complementary energy 最小の原理を適用し、 $f_n(x)$ の直交性を利用すると、Euler の方程式として

$$\begin{aligned} g_{ni}''(y_i) - 2 \langle f_n'' \cdot f_n' \rangle g_{ni}'(y_i) + \langle f_n'' \cdot f_n'' \rangle g_{ni}(y_i) \\ = - \int_{-1}^1 \sigma^0 \psi_{0,i}(x, y_i) \cdot f_n(x) dx \end{aligned} \quad (6)$$

を得る。ここに $\langle f_n^{(p)} \cdot f_m^{(p)} \rangle = \int_{-1}^1 f_n^{(p)}(x) \cdot f_m^{(p)}(x) dx$ を表わす。

式(4)を(5)の境界条件の下に解いて $g_{ni}(y_i)$ が求められ、従って式(4)、更に

$$\sigma_{x,i}^* = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_i}, \quad \sigma_{y,i}^* = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}, \quad \tau_{xy,i}^* = -\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x \partial y_i}$$

から解知応力成分が定められる。

境界条件として、 $x = \pm 1$ 上の条件は既に(5)により満足されているので、残るのは材料の境界面での応力および変位の連続条件だけである。

$$\left. \begin{aligned} y_1 = h_1, \quad y_2 = 0 \quad & \sigma_{y,1}^* = \sigma_{y,2}^*, \quad \tau_{xy,1}^* = \tau_{xy,2}^* \\ & u_1^* = u_2^*, \quad v_1^* = v_2^*, \\ y_2 = h_2, \quad y_3 = 0 \quad & \sigma_{y,2}^* = \sigma_{y,3}^*, \quad \tau_{xy,2}^* = \tau_{xy,3}^* \\ & u_1^* = u_3^*, \quad v_2^* = v_3^*, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

および $g_{n,1}(y_i) = g_{n,1}(-y_i)$ 。

ここに u_i^*, v_i^* はそれぞれ x, y_i 方向の変位成分であり、つぎのようにならべらる。

$$\left. \begin{aligned} E_i u_i^* &= p_{0,i}^* x + \sum_n \{ f_n(x) g_{ni}(y_i) - \nu_i f_n'(x) g_{ni}'(y_i) \} + \text{剛体変位}, \\ E_i v_i^* &= \sum_n \{ f_n'(x) g_{ni}(y_i) - \nu_i f_n(x) g_{ni}'(y_i) \} + \text{剛体変位}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\text{ここに } f_n(x) = \int_0^x f_n(x) dx, \quad g_{ni}(y_i) = \int_0^{y_i} g_{ni}(y_i) dy_i.$$

式(7)の応力条件より容易に求められるように

$$g_{n,1}(h_1) = g_{n,2}(0), \quad g_{n,1}'(h_1) = g_{n,2}'(0) \quad (9)$$

が求められるので、式(8)と式(9)の変位式から今のように、 $\frac{y_1}{E_1} = \frac{y_2}{E_2}$ とあれば「附知応力は生じない」となる。従って、この場合 h_1 が或る程度大きい ($h_2 \geq 2$) と、供試体 I 内の応力分布は一様圧縮と考えられる。

この解析結果、および光弾性実験による応力分布の比較、またその W9 W 供試体による端部拘束の実験結果は近日発表の予定である。

文献

- 1) K. Newman & L. Lachance, "The Testing of Brittle Materials under Uniform Uniaxial Compressive Stress", Proc. ASTM, 1965, pp. 1044 ~ 1067.
- 2) G. Horvay & J. Born, "Tables of Self-Equilibrating Functions", J. of Math. & Phys., vol. 33 (1954), pp. 360 ~ 373.